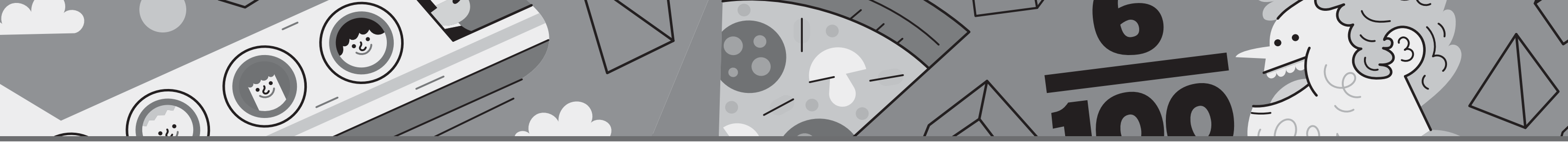


Násobení zlomků

UČ ▸ s. 36–39

Řešené příklady a úlohy

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1 Pro objevení pravidla násobení zlomku zlomkem není šikovné pracovat se zlomky v základním tvaru. Např. Luďkův kus má rozměry $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$ strany čtverce, pokud je vyjádříme zlomky v základním tvaru. Obsah $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ je pro odhalení pravidla vhodné zapsat ve tvaru $\frac{2}{6}$, ale takové vyjádření Luďkovy vyznačené části čokolády v obrázku žáky nemusí napadnout.

Shrnutí UČ ▸ s. 38

Pravidlo pro násobení zlomků se opírá o výpočet obsahu obdélníku. Když v soustavě souřadnic úsečku na ose x s krajními body 0, 1 rozdělíme na pětiny a úsečku 01 na ose y na osminy, je tím jednotkový čtverec (celek) rozdělen na 40 shodných obdélníků, čtverec odpovídá 40 čtyřicetinám, $1 = \frac{40}{40}$. Deset ze 40 shodných obdélníků tvoří obdélník s rozměry $\frac{2}{5}$ a $\frac{5}{8}$, proto $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$. V druhém obrázku jsou na ose x dílky od sebe ve vzdálenosti $\frac{1}{3}$ strany jednotkového čtverce, na ose y ve vzdálenosti $\frac{1}{5}$. Jednotkový čtverec tvoří 15 shodných obdélníků, celek je tedy reprezentován 15 patnáctinami, $1 = \frac{15}{15}$. Obdélník s rozměry $\frac{4}{3}$ a $\frac{9}{5}$ je vyplněn 36 shodnými obdélníky, je tudíž $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$.

Box UČ ▸ s. 39 590 315

Pracovní list 1, Násobení zlomků
V pracovním listu 1 najdete další náročnější úlohu vhodnou k procvičení násobení zlomků. Převádění jednotek teploty z °F na °C a obráceně zahrnuje násobení zlomku přirozeným číslem.
Výsledky úlohy: a) 86 °F; b) 71,6 °F

Box UČ ▸ s. 39 590 315

Pracovní list 2, Násobení zlomků
V úloze na pracovním listu 2 se rozhoduje o pravdivosti tvrzení, v nichž se kombinuje násobení zlomků a jejich porovnávání. Náročnost zvyšuje slovní vyjádření úkolů.

Výsledky úlohy: a) ANO; b) ANO; c) NE, $\frac{5}{3}$ je více než součin $\frac{5}{6}$ a $\frac{7}{4}$; d) ANO

Dělení zlomků

UČ ▸ s. 40–45

Shrnutí UČ ▸ s. 41

Zdůvodnění postupu znázorněním je provedeno v modelu „čokoláda“ a v kruhovém modelu. Barevně vyznačené jsou tři čtvrtiny – tři ze čtyř řádků „čokolády“. Dělitel 7 udává, že se „čokoláda“ rozdělí ještě na 7 sloupců. Vyšrafované dílky jednoho sloupce představují část „čokolády“, která je hledaným podílem. V druhém obrázku jsou vyznačeny $\frac{4}{5}$ kruhu. Tato výseč se rozdělí na shodné části tak, aby jejich počet byl násobkem dělitele, tj. 6.

Úlohy

ÚLOHA 5 Zlomek, o který se liší sousední zlomky, je podílem rozdílu dvou zadaných zlomků a počtu šipek mezi nimi.

Shrnutí UČ ▸ s. 42

Díky této vlastnosti lze podíl zlomků převést na podíl zlomku a přirozeného čísla. Stejná vlastnost se použila v 6. ročníku při dělení desetinným číslem, které se po úpravě nahradilo dělením přirozeným číslem.

Řešené příklady a úlohy

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2 Příklady na dělení, které z úlohy vyplynou, je vhodné uspořádat podle obtížnosti. Příklady (3), (4) zvládnou žáci bez pomoci učitele. K výpočtu podílu (2) se využije vlastnost podílu dvou čísel nebo zlomků popsaná v rámečku nebo se zlomky považují za části hodiny, které se převedou na minuty.

ÚLOHA 6 Doporučujeme, aby zápis příkladu s vynásobeným dělitelem i dělencem vypadal formálně stejně jako v 6. ročníku při dělení desetinného čísla desetinným číslem.

a)

$$\begin{array}{ccl} 3 & : & \frac{2}{3} = \\ \downarrow \cdot 3 & & \downarrow \cdot 3 \\ 9 & : & 2 = \frac{9}{2} \end{array}$$

$$\boxed{3 : \frac{2}{3} = \frac{9}{2}}$$

b)

$$\begin{array}{ccl} 3 & : & \frac{2}{3} = \\ \downarrow \cdot \frac{3}{2} & & \downarrow \cdot \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} & : & 1 = \frac{9}{2} \end{array}$$

$$\boxed{3 : \frac{2}{3} = \frac{9}{2}}$$

Shrnutí UČ ▸ s. 43

Zdůrazněme, že převrácený zlomek existuje ke zlomkům s čitatelem různým od 0.

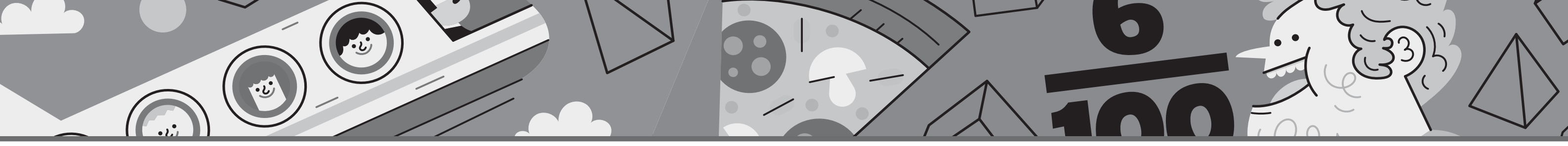
Box UČ ▸ s. 45 590 316

Pracovní list, Dělení zlomků
Pracovní list je věnován výpočtu váženého aritmetického průměru. Při výpočtu váženého aritmetického průměru několika čísel se tato čísla nejprve upraví – každé z nich se vynásobí vahou. Takto upravená čísla se sečtou a následně vydělí součtem vah uplatněných na každé z čísel.

Výsledky úlohy:

a) $\left[(1\cdot 3+1\cdot 1)+\left(\frac{4}{5}\cdot 1\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot 1+\frac{2}{5}\cdot 1\right)\right]:\left(1+1+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right)=\frac{28}{5}:\frac{18}{5}=\frac{28}{18}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}>1\frac{5}{10},\ 1\frac{5}{9}<2{,}5.$
Podle systému vychází Elišce dvojka.

b) Pokud zvládne Eliška ještě dva domácí úkoly na jedničku nebo jedno ústní zkoušení na jedničku, tak bude mít vážený průměr $\frac{32}{5}:\frac{22}{5}=\frac{32}{22}=1\frac{5}{11}<1{,}5$ a podle systému jí bude vycházet jednička.



Opakování

UČ ▸ s. 45–46

Úlohy

ÚLOHA 1 Úloha má různá řešení. Předpokládáme, že žák najde nejjednodušší postup, kterým lze z $\frac{5}{3}$ získat $\frac{7}{4}$ a zároveň ze $\frac{7}{4}$ zlomek $\frac{11}{6}$. Tím je přičítání $\frac{1}{12}$, které můžeme zapsat předpisem $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{12}$, kde a_{n+1} je člen následující po členu a_n a $a_2 = \frac{5}{3}$. Jiné řešení odpovídá předpisu $a_{n+1} = \dfrac{-a_n - 1}{\frac{2}{7}a_n - 2}$, $a_2 = \frac{5}{3}$.

ÚLOHA 5 Úkoly lze vyřešit také s využitím zlomků. Např. v d) odpovídá $\frac{3}{4}$ z 34 000 částka 25 500 Kč, což je více než částka v roce 2012.

ÚLOHA 7 Krupičkovým stačí 44 ks dlaždic a ještě více než polovina další dlaždice. Při nákupu většinou nelze koupit jednotlivé dlaždice, natož jejich části. Je nutné koupit celé balení. Jsou-li baleny po 3 ks, postačí 15 kartonů. Náklady na nákup se rovněž vztahují ke koupi celých kartonů.

Box UČ ▸ s. 46 **INTERAKTIVNÍ CVIČENÍ** 590 317

Jde o náročnější interaktivní cvičení typu kvíz, které nabízí praktické procvičení řešení slovních úloh se zlomky, a to ve třech kolech. Krychle a kvádr s rozměry vyjádřenými zlomkem vedou k procvičení násobení zlomků (výpočet objemu), porovnávání zlomků s desetinnými čísly i navzájem. V nabídce odpovědí u každého kola jsou možnosti s řešením různých situací, které se vztahují k zadání. To znamená, že může být i více odpovědí správných. Vyučující může tedy s žáky vyvodit více otázek vztahujících se k zadání a jejich řešení využít například při skupinové výuce. Cvičení je možné doplnit nákresem. Výhodou je okamžitá kontrola každého kola.

Poznámka:
K tématu Zlomky jsou pod kódem 590 017 připraveny tři generátory dalších úloh v prostředí programu **GeoGebra** na počítání se zlomky. Můžete tak se žáky více procvičovat počítání se zlomky, včetně zlomků záporných. Jsou zde zařazeny i modely, kde žáci určují základní tvar zlomku a také úpravy zlomků složených.

Úprava zlomku (soubor *GeoGebra – úpravy zlomků*)
Instrukce pro práci s materiálem: Tento materiál je zaměřen na znalosti pojmů pravý a nepravý zlomek a na procvičení krácení zlomků a převádění nepravých zlomků do tvaru smíšeného čísla. Úlohy jsou generovány náhodně, s omezujícími podmínkami zajišťujícími smysluplnost zadání.

Nové zadání zobrazíme stisknutím tlačítka *Další úloha*. Řešení se zobrazí zaškrtnutím políčka *Zobrazit výsledek*, skryje se zrušením tohoto zaškrtnutí.

Sčítání zlomků (soubor *GeoGebra – sčítání zlomků*)
Instrukce pro práci s materiálem: Tento materiál je zaměřen na procvičení sčítání zlomků a převádění nepravých zlomků do tvaru smíšeného čísla. Úlohy jsou generovány náhodně, s omezujícími podmínkami zajišťujícími smysluplnost zadání.

Nové zadání zobrazíme stisknutím tlačítka *Další úloha*. Řešení zobrazíme zaškrtnutím políčka *Zobrazit výsledek*, skryje se zrušením tohoto zaškrtnutí. Pokud je alespoň jeden ze jmenovatelů daných sčítanců záporný, objeví se další zaškrtávací políčko *Zobrazit úpravu* pro volbu zobrazení dílčí úpravy příslušného součtu.

ÚLOHA 11 GEOGEBRA 590 364 Materiál nabízí uživateli pracovní prostředí Nákresny programu **GeoGebra** pro samostatné řešení úlohy. Výsledek v něm ale není dostupný. Materiál je tak vhodný pro společné i individuální řešení úlohy a pro společnou diskusi jednotlivých kroků tohoto řešení.

Instrukce pro práci s materiálem: Materiál je tvořen prostředím Nákresny s nabídkou nástrojů omezenou jenom na ty potřebné, a pod Nákresnou uvedeným Algebraickým oknem, do jehož vstupního pole můžeme zapisovat další body. Prostředí je určeno pro postupné zaznamenávání jednotlivých kroků řešení úkolu. K tomu je potřebná znalost pouze několika úkonů v programu **GeoGebra**, konkrétně se jedná o zápis bodu do vstupního řádku, případně jeho umístění do nákresny myší, nastavení parametrů bodu, sestrojení úsečky a zápis součtu souřadnic daných bodů.

Pro úvodní seznámení se základy obsluhy programu lze doporučit *Návody k aplikaci GeoGebra Classic* na adrese https://www.geogebra.org/m/zwbyag58.

Při práci s online appletem je třeba mít na paměti, že se v něm zakreslené řešení neuchovává. Pro potřeby zachování žákovských řešení je vhodné použít prostředí **GeoGebra** Classroom. Konstrukci je možné přibližovat či oddalovat.

Optimální zobrazení appletu, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka ⛶ režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím ⛶, které se objeví na jeho místě.

Box UČ ▸ s. 147 590 365

Pracovní list, Pravoúhelníky

Pracovní list lze použít pro práci ve dvojicích nebo trojicích.

Výsledky úlohy:

b) kolmost sousedních a rovnoběžnost protějších stran pravoúhelníku, shodnost sousedních stran ve čtverci

c) 4 056 mm^2

d) $7\frac{4}{5} : 5{,}2 = 3 : 2$, rozměry narýsovaného návrhu praporu třídy jsou proto ve stejném poměru jako rozměry české vlajky. Zobrazeny jsou africké vlajky v pořadí Guinea, Madagaskar, Sierra Leone.

Kosočtverec a kosodélník – kosoúhelníky

UČ ▸ s. 148–156

Úlohy

VSTUPNÍ ÚLOHA V řešení úkolu 1 jsme použili pojem „kosý úhel“, podle něhož jsou kosoúhelníky pojmenovány, ve smyslu úhel, který není pravý, je ostrý nebo tupý. Za kosý úhel se někdy považuje nenulový úhel, který není pravý, přímý ani plný, tj. připouští se i možnost, že kosý úhel je nekonvexní.

ÚLOHA 3 GEOGEBRA 590 366 K úloze je připravena jednak předloha pro případ, že by nebyl čas na rýsování. Navíc zde najdete materiál představující animaci postupu řešení úlohy. Obrázek je dynamický, je možné manipulovat s určujícími body úlohy, a tak měnit její vstupní konfiguraci.

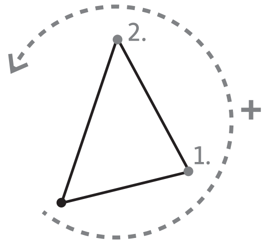
Instrukce pro práci s materiálem: Materiál ilustruje konstrukci řešení daného úkolu. Postup je možné přehrávat pomocí tlačítek navigačního panelu pro krokování konstrukce, buď po jednotlivých krocích, nebo jako souvislou animaci. Obrázek je dynamický. Je možné s ním interagovat prostřednictvím jeho dynamických prvků. Konkrétně se jedná o oranžově vybarvené krajní body dvou průměrů kružnice. Je možné s nimi manipulovat tažením myší, v případě dotykových zařízení prstem. Konstrukci je možné přibližovat či oddalovat.

Vždy je možné se vrátit do výchozí podoby obrázku stisknutím tlačítka pro reset konstrukce v pravém horním rohu pracovní plochy.

Optimální zobrazení, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka ⛶ režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím tlačítka, které se objeví na jeho místě.

ÚLOHA 5 **GEOGEBRA** 590 367 Materiál je určen pro řešení úlohy v digitálním prostředí Nákresny programu **GeoGebra** prostřednictvím manipulace s danými objekty.

Instrukce pro práci s materiálem: Řešitel má k dispozici interaktivní verzi obrázku z učebnice. Trojúhelníky je možné po pracovní ploše přemisťovat, vzájemně k sobě přikládat či překrývat. Každý z trojúhelníků lze po pracovní ploše posouvat i otáčet. Využíváme při tom dva oranžové vrcholy, jejichž role jsou dány jejich pořadím při procházení po obvodu trojúhelníku v kladném smyslu, tj. proti směru pohybu hodinových ručiček. Prvním z dvojice oranžových vrcholů (zde znázorněny šedou barvou) je ten, který při tomto procházení následuje bezprostředně po černém vrcholu trojúhelníku, viz *obr. 4*.



obr. 4: Určení pořadí oranžových vrcholů

Posunutí celého trojúhelníku provedeme tažením myší, při uchopení jeho vnitřku nebo jeho prvního oranžově zbarveného vrcholu. Otočení, jehož středem je z konstrukčních důvodů první z oranžových vrcholů, provedeme tažením druhého z oranžových vrcholů. Obrázek je možné přibližovat či oddalovat.

Vždy je možné se vrátit do výchozí podoby obrázku stisknutím tlačítka pro reset konstrukce v pravém horním rohu pracovní plochy.

Optimální zobrazení, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka ⛶ režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím tlačítka, které se objeví na jeho místě.

Souvislosti UČ ▸ s. 150

Pokud jsou pravítka stejně široká, vymodelují se pomocí nich kosočtverce a čtverec. Pomocí různě širokých pravítek nebo pravítka a proužku papíru jiné šířky než pravítko dostaneme kosodélníky a obdélník.

Úlohy a řešené příklady

ÚLOHA 7 Jako opakování týkající se úhlů lze nejprve zařadit otázky ano/ne, resp. tvrzení, o jejichž pravdivosti se má rozhodnout. Např.: Je vedlejší úhel k ostrému úhlu úhel tupý? Je v dvojici souhlasných úhlů jeden ostrý a druhý tupý? Je vedlejší úhel k pravému úhlu ostrý úhel? ...

Box UČ ▸ s. 150 590 368

Pracovní list, Kosodélník

V tomto pracovním listu se pracuje s vlastnostmi vnitřních úhlů kosodélníku. Předpokládá se, že úhly jsou pojmenovány proti směru hodinových ručiček v pořadí α, β, γ, δ.

Výsledky (vypracování) úlohy:

a) Úhel α a γ jsou protější úhly. Také úhly β a δ jsou protější úhly.

b) Přiložením protějších úhlů na sebe jsem zjistil(a), že jsou shodné.

c) Sestavím-li zpět obdélník, tvoří protější úhly dvojice střídavých úhlů. Tím je potvrzeno, že protější úhly jsou shodné a mají stejnou velikost.

d) Úhly α a β jsou sousední úhly. Také dvojice úhlů β, γ a γ, δ a α, δ jsou sousední úhly.

e) Ve dvojici sousedních úhlů je jeden úhel ostrý a druhý tupý.

f) Součet dvou sousedních úhlů je roven přímému úhlu.

g) Vnitřní úhel kosodélníku nemůže být pravý.

h) Součet všech vnitřních úhlů kosodélníku je větší než přímý úhel, je roven 360°.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1 **GEOGEBRA** 590 369

Zápis konstrukce:

1. KL; $|KL| = 5$ cm
2. $\sphericalangle LKX$; $|\sphericalangle LKX| = 55°$
3. n; $n(K; 3{,}5 \text{ cm})$
4. N; $N \in \mapsto KX \cap n$
5. $\triangle KLN$
6. p; $p \parallel KL$, $N \in p$
7. q; $q \parallel KN$, $L \in q$
8. M; $M \in p \cap q$
9. kosodélník $KLMN$

K příkladu je také připraven materiál v programu **GeoGebra** ilustrující formou animace konstrukci kosodélníku.

Instrukce pro práci s materiálem: Materiál ilustruje postup sestrojení kosodélníku dle daného zadání. Jedná se o animaci řešení popsaného v učebnici. Postup je možné přehrávat pomocí tlačítek navigačního panelu pro krokování konstrukce, buď po jednotlivých krocích, nebo jako souvislou animaci. Obrázek není dynamický. Body *K*, *L* jsou pevně přichyceny k nákresně. Konstrukci je možné přibližovat či oddalovat.

Vždy je možné se vrátit do výchozí podoby obrázku stisknutím tlačítka pro reset konstrukce v pravém horním rohu pracovní plochy.

Optimální zobrazení, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím tlačítka , které se objeví na jeho místě.

Shrnutí UČ ▸ s. 152

Výškou kosoúhelníku je vedle vzdálenosti dvou rovnoběžek také úsečka, jejímiž krajními body jsou paty kolmice vedené k protějším stranám kosoúhelníku. Protože obvod čtyřúhelníku (pravoúhelníku) je podle textu v učebnici na str. 143 číslo, tak i v případě výšky je potlačeno pojetí výšky jako geometrického útvaru a je upřednostněno její pojetí jako čísla.

Řešené příklady

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2 **GEOGEBRA** 590 370

2 b) Zápis konstrukce:

1. KL; $|KL| = 4{,}8$ cm
2. $\sphericalangle KLY$; $|\sphericalangle KLY| = 70°$
3. p; $p \parallel KL$, $v(K, p) = 3{,}5$ cm
4. M; $M \in \mapsto LY \cap p$
5. q; $q \parallel LM$, $K \in q$
6. N; $N \in p \cap q$
7. kosodélník $KLMN$

K příkladu 2 b) je také připraven materiál ilustrující formou animace konstrukci kosoúhelníku. Varianta a) zadání tohoto příkladu nemá řešení.

Instrukce pro práci s materiálem: Materiál ilustruje postup sestrojení kosoúhelníku dle daného zadání příkladu. Jedná se o animaci řešení popsaného v učebnici. Postup je možné přehrávat pomocí tlačítek navigačního panelu pro krokování konstrukce, buď po jednotlivých krocích, nebo jako souvislou animaci. Obrázek není dynamický. Body *K*, *L* jsou pevně přichyceny k nákresně. Konstrukci je možné přibližovat či oddalovat.

Vždy je možné se vrátit do výchozí podoby obrázku stisknutím tlačítka pro reset konstrukce v pravém horním rohu pracovní plochy.

Optimální zobrazení, na obrazovce počítače či na interaktivní tabuli, získáme stisknutím tlačítka režimu celé obrazovky v pravém dolním rohu okna appletu. Zpět se vrátíme stisknutím tlačítka, které se objeví na jeho místě.

Pozor! UČ ▸ s. 155

Z barevné nápovědy vyplývá, že obsah obdélníku opsaného kosočtverci je dvojnásobkem obsahu kosočtverce. Strany tohoto obdélníku jsou shodné s úhlopříčkami kosočtverce, proto pro obsah kosočtverce platí $S = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$, kde *e*, *f* jsou úhlopříčky kosočtverce.

Úlohy

ÚLOHA 19 Čtverce a obdélníky nepovažujeme za kosoúhelníky. O pravdivosti daných tvrzení lze proto jednoznačně rozhodnout.

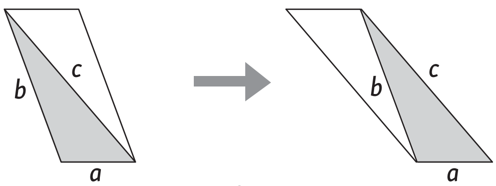
ÚLOHA 23 Hypotéza je tvrzení, o kterém se lze domnívat, že platí, a jehož platnost je žádoucí potvrdit nebo vyvrátit. Hypotézy, jejich dokazování spolu s definicemi, větami a axiomy tvoří podstatu matematické teorie.

Obsah trojúhelníku

UČ ▸ s. 157–159

Úlohy

VSTUPNÍ ÚLOHA Z obrázků je dobře vidět, že obsah trojúhelníku je poloviční oproti obsahu kosoúhelníku (pravoúhelníku) se stranami *a*, *b* a výškami v_a, v_b, takže vzorce $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$ a $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b$ jsou zřejmé. Ke zdůvodnění výpočtu obsahu trojúhelníku pomocí třetí strany, $S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$, bychom potřebovali předpis pro výpočet obsahu kosoúhelníku pomocí jeho úhlopříčky. Snazší je „přeskládat" trojúhelníky, které tvoří kosoúhelník (pravoúhelník) se stranami *a*, *b* na kosoúhelník či pravoúhelník se stejným obsahem a stranami *a*, *c* (viz *obr. 5*), nebo stranami *b*, *c*.



obr. 5

ÚLOHA 1 Strany a výšky trojúhelníků mají následující velikosti. (Je uvedena velikost výšky na stranu, jejíž délka je podtržená.)

(1) <u>42</u> mm, 45 mm, 39 mm, $v = 36$ mm; (2) 30 mm, 51 mm, <u>63</u> mm, $v = 24$ mm; (3) 42 mm, 40 mm, <u>58</u> mm, $v = 29$ mm;
$S_1 = S_2 = 756\ \text{mm}^2$, $S_3 = 840\ \text{mm}^2$; $o_1 = 126$ mm, $o_2 = 144$ mm, $o_3 = 140$ mm