Racionální čísla

Víš, že…

- racionální v matematice znamená „poměrový“ nebo „podílový“, zatímco v běžné řeči ho užíváme spíše ve významu „rozumový“?
- zlomky používali již staří Egypťané, jak dokazuje Rhindův papyrus v Britském muzeu v Londýně?
- ve škole se naučíš jen zlomek toho, co budeš v životě potřebovat?
- hmotnostní zlomek zlata ve čtrnáctikarátovém zlatu je $\frac{14}{24}$?
- hmotnostní zlomek nemusí rovnat objemovému zlomku?

Naučíš se…

- další operace s racionálními čísly.
- určovat periodu a předperiodu racionálních čísel.
- řešit úlohy z praxe.

Racionální čísla

Vynásobíme-li libovolná dvě celá čísla, je výsledkem opět celé číslo. Tato vlastnost však není splněna v případě dělení celých čísel, tj. k vyjádření části celku množina celých čísel nestačí. To je jeden z hlavních důvodů, proč zavádíme množinu racionálních čísel.

zapamatujeme si

Racionálním číslem rozumíme každé číslo ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde p, $q \neq 0$ jsou celá čísla.

Množinu všech racionálních čísel označujeme $\mathbb{Q}$ (z latinského *quotient* – podíl).

English Terms

rational number / racionální číslo
decimal / desetinný
periodic / periodický
fraction / zlomek
nominator / čitatel
denominator / jmenovatel

Přirozená i celá čísla jsme si znázorňovali na číselné ose. Také v případě několika racionálních čísel je takové znázornění možné. Nelze ale „rozumně znázornit“ např. všechna racionální čísla větší než 1 a menší než 2. Takových racionálních čísel je nekonečně mnoho a na obrázku by tato čísla „splynula“ do souvislé čáry. To by ale nebylo dobře, protože taková „čára“ by zahrnovala i body, které nepředstavují racionální číslo, např. $\sqrt{2}$ (jak se dozvíme v kapitole o reálných číslech).

Pozor! Zápis racionálního čísla ve tvaru $\frac{p}{q}$ není jednoznačný. Racionální číslo lze vyjádřit nekonečně mnoha způsoby. Například číslo $\frac{2}{5}$ můžeme ekvivalentně vyjádřit jako $\frac{-14}{-35}, \frac{6}{15}, \frac{20}{50}, \frac{-200}{-500}, \frac{34}{85} \ldots$

zapamatujeme si

Pro libovolné racionální číslo $\frac{p}{q}$ platí:

- $\frac{p}{q} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q}$, kde $k \neq 0$ je celé číslo.
- Vynásobíme-li čitatel i jmenovatel zlomku stejným celým číslem $k \neq 0$, provádíme „**rozšiřování zlomku**“.
- Vydělíme-li čitatel i jmenovatel zlomku stejným celým číslem $k \neq 0$, provádíme „**krácení zlomku**“.
- Každé racionální číslo lze zapsat ve tvaru, kde jsou čísla p a q nesoudělná a q je přirozené číslo. Tomuto tvaru se říká **základní tvar racionálního čísla**.

Obvykle se snažíme vyjadřovat racionální čísla v základním tvaru. Převod racionálního čísla na základní tvar se provádí krácením zlomku.

U přirozených a celých čísel není obtížné určit, které číslo je menší a které větší. Při porovnávání dvou racionálních čísel musíme nejprve každé z nich vyjádřit v takovém tvaru, aby ve **jmenovateli bylo přirozené číslo** (to lze udělat vždy). Pak postupujeme takto:

zapamatujeme si

Pro racionální čísla $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$, kde q a s jsou přirozená čísla, platí:

- $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ právě tehdy, když $p \cdot s < r \cdot q$
- $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ právě tehdy, když $p \cdot s = r \cdot q$
- $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ právě tehdy, když $p \cdot s > r \cdot q$

Racionální čísla

Racionální čísla můžeme sčítat, odčítat, násobit a dělit podle následujících pravidel:

zapamatujeme si

Pro libovolná dvě racionální čísla $\frac{p}{q}$ a $\frac{r}{s}$ platí:

- $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+rq}{qs}$
- $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{ps-rq}{qs}$
- $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$
- $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{ps}{qr}$, kde $r\neq 0$

Poznámka: Všimněte si, že zlomky mají zvláštní vlastnost – jejich násobení je jednodušší než sčítání. Sčítání zlomků je mnohem komplikovanější, protože je musíme nejprve převést na zlomky se stejnými jmenovateli.

Zlomky, jejichž hodnota je větší než 1 nebo menší než –1 (tzv. **nepravé zlomky**), můžeme zapsat také jako **smíšená čísla**. Například zlomek $\frac{19}{5}$ můžeme zapsat jako smíšené číslo $3\frac{4}{5}$. S převáděním nepravých zlomků na smíšená čísla a naopak jste se setkali již na základní škole.

Při běžných výpočtech i v řadě matematických aplikací je práce se zlomky poněkud těžkopádná. Z tohoto důvodu se obvykle vyjadřuje zlomek v jiném tvaru.

zapamatujeme si

Racionální číslo můžeme zapsat ve tvaru:

- zlomku,
- desetinného čísla,
- nekonečného desetinného periodického rozvoje.

V některých případech je převedení zlomku na desetinné číslo snadné. Například zlomek $\frac{19}{250}$ převedeme na desetinné číslo takto: $\frac{19}{250}=\frac{19\cdot 4}{250\cdot 4}=\frac{76}{1000}=0{,}076$

V tomto případě byl převod snadný. Převáděli jsme totiž zlomek (v základním tvaru), který měl ve jmenovateli po rozkladu na součin prvočísel jen mocniny čísel 2 a 5 ($250=2\cdot 5^3$). Takový zlomek lze rozšířit tak, že ve jmenovateli získáme mocninu 10. V našem případě jsme zlomek rozšířili 4, jmenovatel byl tedy roven 1 000, tj. 10^3.

Zlomky, které v základním tvaru mají ve jmenovateli po rozkladu na součin prvočísel i jiné činitele než 2 a 5, **nelze** vyjádřit ve tvaru konečného desetinného rozvoje. Nelze je totiž rozšířit tak, aby ve jmenovateli byla jen mocnina 10.

Takové zlomky můžeme zapsat ve tvaru nekonečného desetinného periodického rozvoje. Například zlomek $\frac{5}{11}$ převedeme do tvaru nekonečného desetinného periodického rozvoje takto:

5 : 11 = 0,45454...
50
 60
  50
   60
    50

Racionální čísla

V dělení můžeme pokračovat libovolně dlouho, protože zbytek nikdy nebude roven 0. Zbytky se vždy začnou po čase opakovat, a tedy v desetinném rozvoji se začne opakovat i skupina číslic, kterou nazýváme **perioda**. Číslo s periodou zapíšeme tak, že nad periodou uděláme pruh a další číslice již nepíšeme. Tedy: $\frac{5}{11} = 0,\overline{45}$

Poznámka: Všimněte si, že v tomto případě tvoří periodu skupina 45, ale i skupiny 4545, 454545 atd. Z tohoto důvodu budeme periodou nadále rozumět „nejkratší" z možných period.

V některých případech se v nekonečném desetinném rozvoji racionálního čísla objeví před periodou skupina číslic, která se dále neopakuje. Takový rozvoj racionálního čísla nazýváme **neryze periodický** a skupinu neopakujících se číslic označujeme jako **předperiodu**.

Například při převodu racionálního čísla $\frac{581}{1100}$ do tvaru nekonečného desetinného periodického rozvoje dostaneme:

581 : 1 100 = 0,528181...

5810

3100

9000

2000

9000

2000

Předperioda je zde 52 a perioda 81, tedy $\frac{581}{1100} = 0,52\overline{81}$.

Desetinný rozvoj racionálního čísla, který předperiodu neobsahuje, nazýváme **ryze periodický**.

V některých případech stojíme před obráceným úkolem, tj. převést číslo s nekonečným desetinným periodickým rozvojem do tvaru zlomku. Pokud umíme sčítat geometrické řady, není tento úkol obtížný. Pokud ne, můžeme postupovat takto:

Chceme například vyjádřit číslo $0,\overline{93}$ ve tvaru zlomku.

1. Označíme uvedené číslo jako x, tj. $x = 0,\overline{93}$.
2. Vynásobíme celou rovnici 100 a dostaneme: $100x = 93,\overline{93}$
3. Od této rovnice odečteme rovnici $x = 0,\overline{93}$ a dostaneme:
   $100x - x = 93,\overline{93} - 0,\overline{93}$
   $99x = 93$
4. Odtud plyne, že $x = \frac{93}{99} = \frac{31}{33}$, což znamená, že $0,\overline{93} = \frac{31}{33}$

Tím jsme převedli číslo s nekonečným desetinným periodickým rozvojem na zlomek.

historie

Staří Egypťané pracovali pouze s tzv. **kmenovými zlomky**, což jsou zlomky mající v čitateli 1. Všechny ostatní zlomky byly vyjádřeny pomocí kmenových zlomků. Jedinou výjimkou byl zlomek $\frac{2}{3}$, pro který existoval zvláštní znak. Pro vyjádření jakéhokoliv zlomku pomocí zlomků kmenových bylo potřeba znát tvar zlomků, které měly dvojku v čitateli. Pomocí nich se již ostatní zlomky vyjádřily snadno. Na tzv. Rhindově papyru (získal ho skotský právník A. H. Rhind během svého pobytu v Thébách v roce 1850) je uvedena tabulka zlomků tvaru $\frac{2}{n}$ (pro lichá n až do čísla 101) vyjádřených jako součet kmenových zlomků.

Rhindův papyrus

Racionální čísla

Příklad 1

Převeďte do základního tvaru zlomky: a) $\frac{5\,640}{1\,560}$, b) $\frac{5\,940}{12\,420}$, c) $\frac{7\,560}{18\,900}$.

řešení

Využíváme kritéria dělitelnosti.

a) $\frac{5\,640}{1\,560}$

1. krok

Vidíme, že čitatel i jmenovatel jsou čísla dělitelná 10, tj. krátíme zlomek 10:

$\frac{5\,640}{1\,560} = \frac{564}{156}$

2. krok

Zlomek krátíme 4 … $\frac{564}{156} = \frac{141}{39}$

3. krok

Zlomek krátíme 3 … $\frac{141}{39} = \frac{47}{13}$

závěr

Zlomek $\frac{47}{13}$ je tedy základní tvar zlomku $\frac{5\,640}{1\,560}$.

b) $\frac{5\,940}{12\,420}$

1. krok

Vidíme, že čitatel i jmenovatel jsou čísla dělitelná 10, tj. krátíme zlomek 10:

$\frac{5\,940}{12\,420} = \frac{594}{1\,242}$

2. krok

Zlomek krátíme 2 … $\frac{594}{1\,242} = \frac{297}{621}$

3. krok

Zlomek krátíme 9 … $\frac{297}{621} = \frac{33}{69}$

4. krok

Zlomek krátíme 3 … $\frac{33}{69} = \frac{11}{23}$

závěr

Zlomek $\frac{11}{23}$ je tedy základní tvar zlomku $\frac{5\,940}{12\,420}$.

c) $\frac{7\,560}{18\,900}$

1. krok

Vidíme, že čitatel i jmenovatel jsou čísla dělitelná 10, tj. krátíme zlomek 10:

$\frac{7\,560}{18\,900} = \frac{756}{1\,890}$

2. krok

Zlomek krátíme 2 … $\frac{756}{1\,890} = \frac{378}{945}$

3. krok

Zlomek krátíme 9 … $\frac{378}{945} = \frac{42}{105}$

4. krok

Zlomek krátíme 3 … $\frac{42}{105} = \frac{14}{35}$

5. krok

Zlomek krátíme 7 … $\frac{14}{35} = \frac{2}{5}$

závěr

Zlomek $\frac{2}{5}$ je tedy základní tvar zlomku $\frac{7\,560}{18\,900}$.

Racionální čísla

Příklad 2

Porovnejte zlomky: a) $\frac{11}{23}, \frac{5}{8}$; b) $\frac{-12}{-5}, \frac{5}{7}$; c) $\frac{-11}{3}, \frac{35}{-8}$.

řešení

a) $\frac{11}{23}, \frac{5}{8}$

1. krok

Oba zlomky mají ve jmenovateli přirozené číslo, tedy můžeme začít porovnávat.

2. krok

$11 \cdot 8 = 88$ a $23 \cdot 5 = 115$

3. krok

$88 < 115$

závěr

$\frac{11}{23} < \frac{5}{8}$

b) $\frac{-12}{-5}, \frac{5}{7}$

1. krok

Vzhledem k tomu, že první zlomek nemá ve jmenovateli přirozené číslo, musíme ho nejprve upravit, tj. rozšířit zlomek číslem (-1).

2. krok

$\frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$

3. krok

Nyní můžeme začít porovnávat zlomky $\frac{12}{5}$ a $\frac{5}{7}$.

4. krok

$12 \cdot 7 = 84$ a $5 \cdot 5 = 25$

5. krok

$84 > 25$

závěr

$\frac{-12}{-5} > \frac{5}{7}$

c) $\frac{-11}{3}, \frac{35}{-8}$

1. krok

Vzhledem k tomu, že druhý zlomek nemá ve jmenovateli přirozené číslo, musíme ho nejprve upravit, tj. rozšířit zlomek číslem (-1).

2. krok

$\frac{35}{-8} = \frac{-35}{8}$

3. krok

Nyní můžeme začít porovnávat zlomky $\frac{-11}{3}$ a $\frac{-35}{8}$.

4. krok

$(-11) \cdot 8 = -88$ a $3 \cdot (-35) = -105$

5. krok

$-88 > -105$

závěr

$\frac{-11}{3} > \frac{35}{-8}$