

Lineární nerovnice a jejich soustavy

Víš, že...

pojem „nerovnice“ není opakem pojmu „rovnice“?

lineární rovnice má většinou jediné řešení, kdežto lineární nerovnice má většinou nekonečně mnoho řešení?

lineární nerovnice umožňuje popsat polopřímku?

násobíme-li, nebo dělíme-li nerovnost záporným číslem, obrací se znak nerovnosti?

Naučíš se...

pojmy související s lineárními nerovnicemi a jejich soustavami.

řešit lineární nerovnice a jejich soustavy početně i graficky.

Lineární nerovnice a jejich soustavy

Lineární nerovnice

zapamatujeme si

Lineární nerovnicí s neznámou x budeme rozumět některý ze vztahů:

- $ax + b > 0$,
- $ax + b \geq 0$,
- $ax + b \leq 0$,
- $ax + b < 0$,

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou reálné koeficienty.

English Terms

inequality / nerovnice

solution of an inequality / řešení nerovnice

system of inequalities / soustava nerovnic

equivalent inequality / ekvivalentní nerovnice

graphic solution / grafické řešení

Příklady lineárních nerovnic jsou nerovnice $5x - 3 > 0$, nebo $-x - 1 \leq 0$. Domluvme se, že zde budeme za lineární nerovnice považovat i nerovnice, kdy je $a = 0$, tj. např. i nerovnice $0 \cdot x + 0 < 0$, $0 \cdot x + 3 \leq 0$.

Lineárními nerovnicemi se označují i takové nerovnice, které lze na výše uvedený tvar převést. Např. nerovnici $2x - 2 < 3 - 4x$ lze ekvivalentními úpravami převést na nerovnici $6x - 5 < 0$.

zapamatujeme si

Nejčastějšími **ekvivalentními úpravami lineární nerovnice** jsou:

- přičtení libovolného reálného čísla k oběma stranám nerovnice,
- vynásobení (či vydělení) obou stran nerovnice kladným reálným číslem, kdy se znak nerovnosti nemění,
- vynásobení (či vydělení) obou stran nerovnice záporným reálným číslem, kdy se znak nerovnosti obrací,
- záměna pravé a levé strany nerovnice a převrácení znaku nerovnosti.

souvislosti

Se soustavami lineárních nerovnic s jednou neznámou se setkáte v dalších kapitolách při řešení kvadratických nerovnic či nerovnic s absolutními hodnotami.

Řešení lineárních nerovnic

Lineární nerovnici $ax + b > 0$, $a > 0$, upravíme na ekvivalentní tvar:

$$ax > -b \quad / : a > 0$$

$$x > -\frac{b}{a}$$

Této nerovnici vyhovují všechna reálná čísla větší než $-\frac{b}{a}$, takže množinu řešení zapíšeme jako interval $K = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

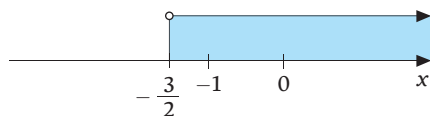
Například množina řešení nerovnice $2x + 3 > 0$ je:

$$2x + 3 > 0$$

$$2x > -3$$

$$x > -\frac{3}{2}$$

$$K = \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$$



Lineární nerovnice a jejich soustavy

Lineární nerovnici $ax + b > 0$, $a < 0$, upravíme na ekvivalentní tvar:

$$ax > -b \quad / : a < 0$$

$$x < -\frac{b}{a}$$

Nerovnici vyhovují všechna reálná čísla menší než $-\frac{b}{a}$, takže množinu řešení zapíšeme jako interval $K = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

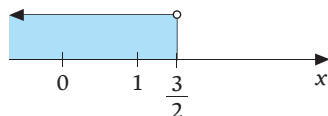
Například množina řešení nerovnice $-2x + 3 > 0$ je:

$$-2x + 3 > 0$$

$$-2x > -3$$

$$x < \frac{3}{2}$$

$$K = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$$



Ostatní typy lineárních nerovnic řešíme analogicky.

Zkouška by měla být součástí řešení každé nerovnice, měla by se tedy provádět i po vyřešení lineární nerovnice. Lineární nerovnice má ale většinou nekonečně mnoho řešení, takže zkoušku dosazováním číselných hodnot provést nelze. Musíme se proto spolehnout na správnost algebraických úprav během řešení. Vždy je pak dobré provést úpravy ještě jednou. Také je užitečné dosadit do nerovnice několik konkrétních číselných hodnot, a ověřit tak správnost řešení aspoň pro některé hodnoty.

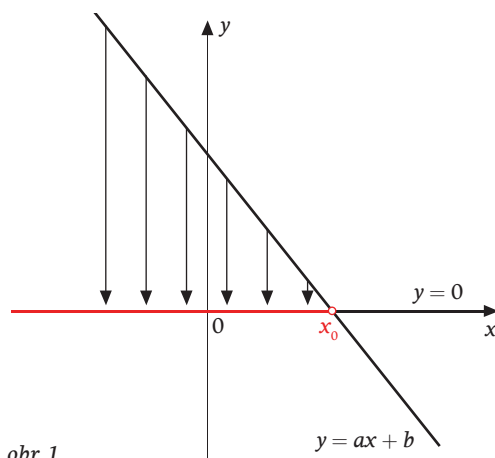
Grafické řešení lineární nerovnice

Lineární nerovnice lze také řešit graficky. K tomu využijeme **grafy lineárních funkcí**.

Vysvětlíme si takové řešení například na nerovnici $ax + b > 0$, $a < 0$.

Postup:

- Převědeme levou i pravou stranu nerovnice do podoby funkcí $y = ax + b$ a zároveň $y = 0$.
- Grafy obou funkcí znázorníme do jedné soustavy souřadnic; první souřadnici průsečíku grafů funkcí označíme x_0 .
- Všechny body grafu funkce $y = ax + b$, které se nacházejí nad osou x , promítneme na osu x .
- V našem případě je interval $(-\infty; x_0)$ grafickým řešením dané nerovnice (obr. 1).

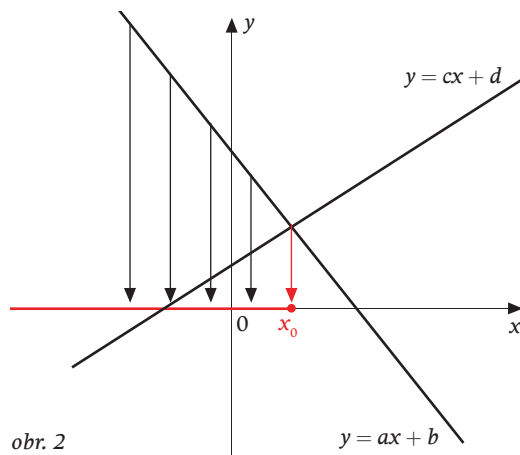


obr. 1

Lineární nerovnice a jejich soustavy

V případě nerovnice $ax + b \geq cx + d$ postupujeme následovně:

- Zakreslíme grafy funkcí $y = ax + b$ a $y = cx + d$ a znázorníme jejich průsečík.
- Jelikož nás zajímá jen hodnota neznámé x , promítneme průsečík na osu x do bodu x_0 .
- Následně vybereme jako řešení dané nerovnice jeden z intervalů $(-\infty; x_0)$, nebo $\langle x_0; +\infty)$. Interval určíme podle toho, ve kterém z nich jsou hodnoty funkce $y = ax + b$ výše, nebo rovny v porovnání s hodnotami funkce $y = cx + d$.
- V našem případě je grafickým řešením dané nerovnice interval $(-\infty; x_0)$ (obr. 2).



obr. 2

Soustavy lineárních nerovnic

zapamatujeme si

Soustavou lineárních nerovnic s jednou neznámou rozumíme několik lineárních nerovnic s jednou neznámou, jejíž řešení musí vyhovovat zároveň všem zadaným nerovnicím.

Soustava lineárních nerovnic s jednou neznámou je například: $5x - 3 > 0$ nebo $4x + 1 > 0$
 $x + 3 \leq 0$ $2 - x < 0$
 $\frac{x}{2} + 5 \leq 0$

Pokud nejsou ještě nerovnice upraveny do předchozích tvarů, může taková soustava být například: $5x - 3 > -2x + 3$
 $x + 3 \leq 4x$

Při řešení soustav lineárních rovnic se používají ekvivalentní úpravy. Ekvivalentnost takových úprav budeme značit oddělovací vodorovnou čarou: $5x - 3 > -2x + 3$

$$\begin{array}{r} x + 3 \leq 4x \\ \hline 7x - 3 > 3 \\ -3x + 3 \leq 0 \end{array}$$

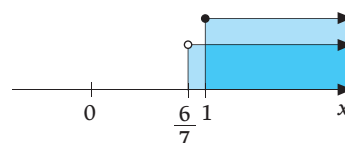
Soustavu lineárních nerovnic řešíme tak, že stanovíme množinu řešení každé nerovnice soustavy a celkové řešení soustavy je pak rovno **průniku všech získaných množin řešení**.

Řešením uvedené soustavy nerovnic je tedy: $7x - 3 > 3$

$$-3x + 3 \leq 0$$

$$x > \frac{6}{7}$$

$$x \geq 1$$



Po ekvivalentních úpravách dostáváme, že řešením první nerovnice je interval $\left(\frac{6}{7}; +\infty\right)$ a řešením druhé nerovnice je interval $\langle 1; +\infty)$.

Řešením dané soustavy nerovnic je průnik obou intervalů: $K = \left(\frac{6}{7}; +\infty\right) \cap \langle 1; +\infty) = \langle 1; +\infty)$.

Lineární nerovnice a jejich soustavy

Příklad 1

Najděte všechna řešení nerovnice $3x - 5 < 0$.

řešení

1. krok

Nerovnici postupně upravujeme:

$$3x - 5 < 0$$

$$3x < 5$$

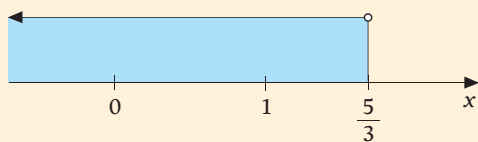
$$x < \frac{5}{3}$$

2. krok

Poslední nerovnici vyhovuje nekonečně mnoho čísel, proto zkoušku není možné provést dosazováním čísel za neznámou. Úpravy byly ale ekvivalentní, takže teoreticky zkoušku není nutné provádět.

3. krok

Množinou řešení jsou všechna $x < \frac{5}{3}$, což zapíšeme jako otevřený interval $K = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$.



Příklad 2

Najděte všechna řešení nerovnice $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \geq 4 - 2x$.

řešení

1. krok

Nerovnici postupně upravujeme:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \geq 4 - 2x \quad / \cdot 6$$

$$4x + 3 \geq 24 - 12x \quad / +12x$$

$$16x + 3 \geq 24 \quad / -3$$

$$16x \geq 21 \quad / :16$$

$$x \geq \frac{21}{16}$$

2. krok

Poslední nerovnici vyhovuje nekonečně mnoho čísel, proto zkoušku není možné provést dosazováním čísel za neznámou. Úpravy byly ale ekvivalentní, takže teoreticky zkoušku není nutné provádět.

3. krok

Množinu řešení zapíšeme jako polouzavřený interval: $K = \left[\frac{21}{16}; +\infty\right)$

