Základní vlastnosti funkcí

Víš, že...

- Tomáš Garrigue Masaryk zastával funkci prezidenta více než 17 let?
- rodina plní řadu funkcí – reprodukční, sociálně ekonomickou, výchovnou atd.?
- funkcí rozumí biologové fyziologickou činnost orgánu nebo části těla?

Naučíš se...

- základní vlastnosti funkcí.
- určovat monotonii funkce.
- pracovat s grafem funkce.

Základní vlastnosti funkcí

Funkce je jedním z nejdůležitějších matematických pojmů. S jednoduchými funkcemi jste se setkali již na základní škole. V této rozsáhlé kapitole rozšíříme podstatným způsobem znalosti o funkcích, jejich grafech a některých vlastnostech. Také si ukážeme, jak můžeme tyto vědomosti využít v běžném životě. Zkoumání funkcí a jejich vlastností se věnuje oblast matematiky nazývaná *matematická analýza*.

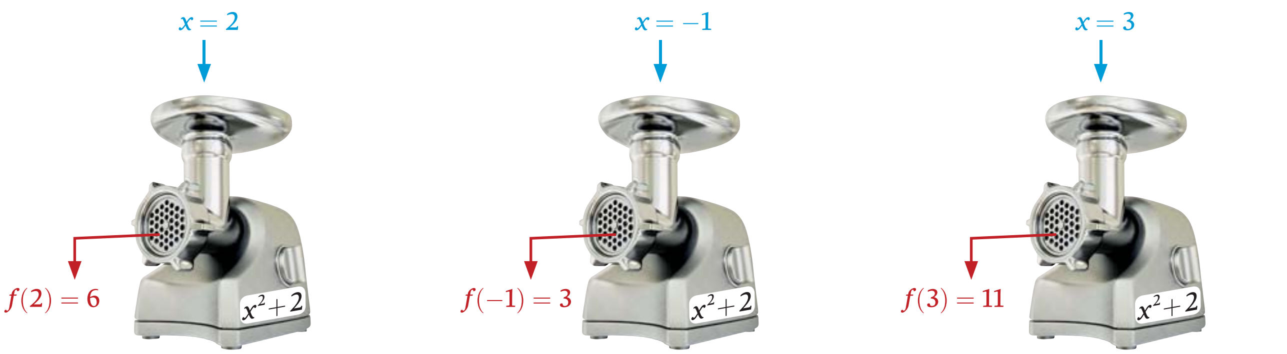
English Terms

- **function** / funkce
- **graph** / graf
- **cartesian coordinates** / kartézské souřadnice
- **coordinate origin** / počátek souřadnic
- **coordinate** / souřadnice
- **decreasing function** / klesající funkce
- **domaine** / definiční obor
- **maximum** / maximum
- **minimum** / minimum
- **non-decreasing** / neklesající
- **non-increasing** / nerostoucí
- **axial symmetry** / osová symetrie

zapamatujeme si

Funkcí na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ rozumíme předpis, který každému číslu množiny M přiřadí právě jedno reálné číslo. Množina M se nazývá **definiční obor funkce**.

- Funkce označujeme zpravidla malými písmeny f, g, h atd. Definiční obor funkce f značíme $D(f)$. Podobně $D(g)$, resp. $D(h)$ označíme definiční obor funkce g, resp. h. Není-li definiční obor blíže specifikován, hledáme k dané funkci vždy **maximální možný** definiční obor.
- Je-li f funkce na množině M, pak číslo, které funkce f přiřadí číslu $x \in M$, označíme $f(x)$ a nazveme **funkční hodnotou** (**hodnotou funkce**) v bodě x nebo **obrazem** bodu x při funkci f.
  Množinu všech $y \in \mathbb{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno $x \in D(f)$ takové, že $y = f(x)$, nazýváme **oborem hodnot** funkce f a značíme $H(f)$.
- Funkci na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ si můžeme představit jako „mlýnek“, do kterého vstupují čísla z množiny M a výstupem jsou odpovídající funkční hodnoty. Fungování takového „mlýnku“ v případě funkce $f(x) = x^2 + 2$ je znázorněno na následujícím obrázku:



Na základní škole jste sestrojovali grafy některých funkcí v kartézské soustavě souřadnic Oxy.

zapamatujeme si

Grafem funkce f ve zvolené soustavě souřadnic Oxy v rovině je množina všech bodů $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$.

Nyní se seznámíme s některými vlastnostmi funkcí, což nám může významně pomoci při sestrojování jejich grafů.

zapamatujeme si

Funkce f se nazývá **sudá funkce**, pokud:

1. pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$,
2. pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = f(-x)$.

Poznámka: Uvědomte si, že 1. podmínka v definici sudé funkce říká, že definiční obor takové funkce je množina „symetrická“ kolem bodu 0 a graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y.

Základní vlastnosti funkcí

zapamatujeme si

Funkce f se nazývá **lichá funkce**, pokud:

1. pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$,
2. pro každé $x \in D(f)$ platí $-f(x) = f(-x)$.

Poznámka: Uvědomte si, že 1. podmínka v definici liché funkce opět říká, že definiční obor takové funkce je množina „symetrická" kolem bodu 0 a graf liché funkce je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic Oxy.

zapamatujeme si

Funkce f se nazývá

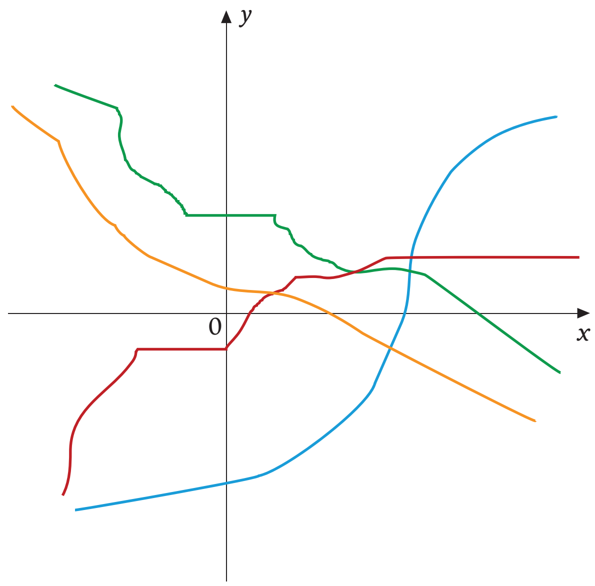
1. **rostoucí,**
2. **neklesající,**
3. **klesající,**
4. **nerostoucí**

na množině $A \subseteq D(f)$, pokud pro všechna $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí:

1. $f(x_1) < f(x_2)$,
2. $f(x_1) \leq f(x_2)$,
3. $f(x_1) > f(x_2)$,
4. $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Má-li funkce f na množině $A \subseteq D(f)$ některou z vlastností 1. – 4., říkáme, že funkce f je **monotónní** na množině A.

Příklad grafu rostoucí, neklesající, klesající a nerostoucí funkce je na následujícím obrázku.



zapamatujeme si

Funkce f se nazývá **zdola omezená na množině** $A \subseteq D(f)$, pokud existuje číslo d takové, že pro všechna $x \in A$, platí $f(x) \geq d$.

Funkce f se nazývá **shora omezená na množině** $A \subseteq D(f)$, pokud existuje číslo h takové, že pro všechna $x \in A$, platí $f(x) \leq h$.

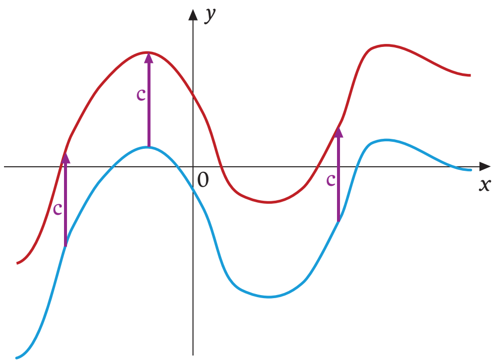
Funkce f se nazývá **omezená na množině** $A \subseteq D(f)$, pokud je omezená zdola i shora.

Základní vlastnosti funkcí

Při sestrojování grafů funkcí platí několik obecných pravidel. Mějme nějaký graf funkce $y_1 = f(x)$. Ukážeme si, jak nakreslit grafy následujících funkcí:

1. $y = f(x) + c$, kde $c > 0$ je reálné číslo.

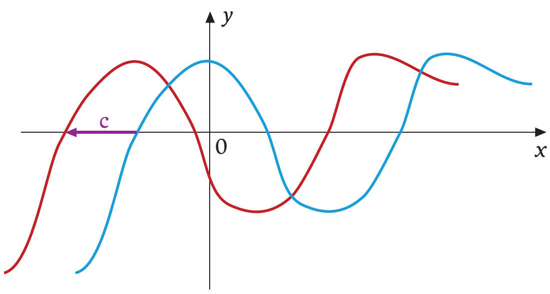
   Zvětšíme-li každou možnou hodnotu $f(x)$ o konstantu c, dostaneme výraz $f(x) + c$. Zvětšení funkční hodnoty představuje posun grafu po ose y směrem „nahoru“ o konstantu c, jak vidíme na obrázku.



   V případě, že $c < 0$ se graf posouvá po ose y směrem „dolů“.

2. $y = f(x + c)$, kde $c > 0$ je reálné číslo.

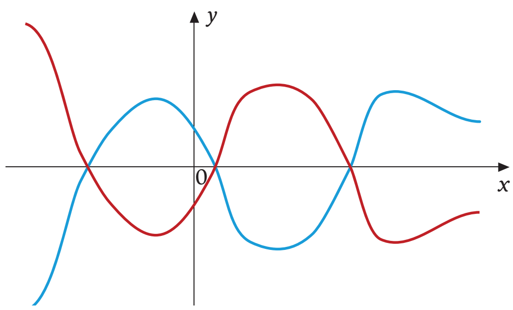
   Zvětšíme-li každou možnou hodnotu x o konstantu c, dostaneme výraz $x + c$. Tedy například $f(0) = f(-c)$, protože $-c + c = 0$. Znamená to, že hodnotu, které nabývá funkce $f(x)$ v bodě 0, nabývá funkce $f(x + c)$ již v bodě $-c$. Posouváme tedy graf po ose x směrem „vlevo“ o konstantu c, jak vidíme na obrázku.



   V případě, že $c < 0$ se graf posouvá po ose x směrem „vpravo“.

3. $y = -f(x)$

   Přidáním znaménka minus se všechny kladné hodnoty $f(x)$ změní na záporné (a také všechny záporné hodnoty se změní na kladné), ale se stejnou vzdáleností od osy x. Tedy grafy $f(x)$ a $-f(x)$ musí být osově souměrné podle osy x, jak vidíme na obrázku.

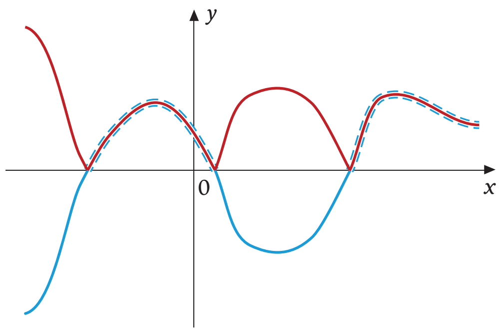


Základní vlastnosti funkcí

4. $y = |f(x)|$

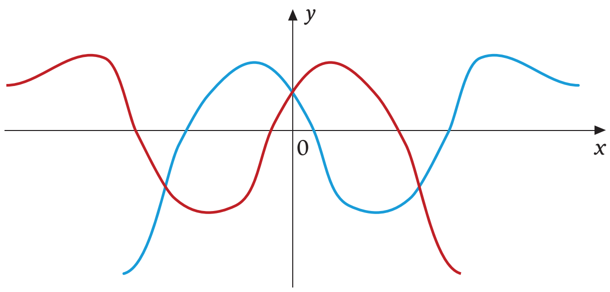
Z definice absolutní hodnoty víme, že pro nezáporná x je $|x| = x$. Pro nezáporné hodnoty $f(x)$ jsou tedy grafy $f(x)$ a $|f(x)|$ totožné.

Pro záporná x je $|x| = -x$. Tedy pro záporné hodnoty $f(x)$ jsou grafy $f(x)$ a $|f(x)| = -f(x)$ osově souměrné podle osy x (to víme z předchozího bodu 3).



5. $y = f(-x)$

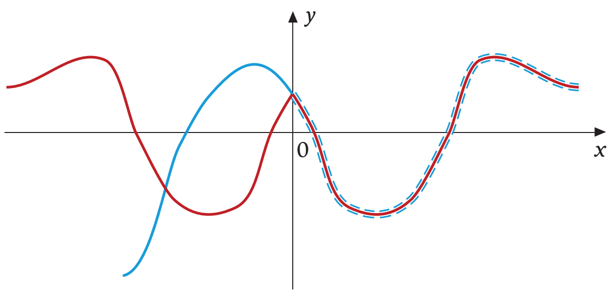
Přidáním znaménka minus se kladné hodnoty x změní na záporné a naopak. Tedy grafy $f(x)$ a $f(-x)$ budou osově souměrné podle osy y.



6. $y = f(|x|)$

Z definice absolutní hodnoty víme, že pro nezáporná x je $|x| = x$. Pro nezáporné hodnoty x jsou tedy grafy $f(x)$ a $f(|x|)$ totožné.

Pro záporná x je $|x| = -x$. Tedy pro záporné hodnoty $f(x)$ jsou grafy $f(x)$ a $f(|x|) = f(-x)$ osově souměrné podle osy y (to víme z předchozího bodu 5).



Základní vlastnosti funkcí

S řadou dalších vlastností a pojmů, které se týkají funkcí, se seznámíme v ostatních kapitolách tématu Funkce. Z důvodů rychlejší orientace uvádíme na tomto místě přehled všech definovaných pojmů a vlastností. Jejich podrobnější vysvětlení, procvičení a příklady najdete v konkrétních kapitolách.

pojem / vlastnost	vysvětlení
funkce definiční obor obor hodnot	**Funkcí** na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ rozumíme předpis, který každému číslu množiny M přiřadí právě jedno reálné číslo. Množina M se nazývá **definiční obor funkce** a značíme $D(f)$. Množinu všech $y \in \mathbb{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno $x \in D(f)$ takové, že $y = f(x)$, nazýváme **oborem hodnot** funkce f a značíme $H(f)$.
graf funkce	**Grafem funkce f** ve zvolené soustavě souřadnic Oxy v rovině je množina všech bodů $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$.
funkce sudá/lichá	Funkce f se nazývá **sudá funkce**, pokud: 1. pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$, 2. pro každé $x \in D(f)$ platí: $f(x) = f(-x)$. Funkce f se nazývá **lichá funkce**, pokud: 1. pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$, 2. pro každé $x \in D(f)$ platí: $-f(x) = f(-x)$.
funkce periodické	Funkce f se nazývá **periodická funkce**, pokud existuje reálné číslo $d > 0$ takové, že pro všechna $x, x + d \in D(f)$ platí: $f(x) = f(x + d)$. Nejmenší takové d se nazývá **periodou** funkce.
funkce rostoucí/klesající	Funkce f se nazývá **rostoucí**, resp. **neklesající**, resp. **klesající**, resp. **nerostoucí** na množině $A \subseteq D(f)$, pokud pro všechna $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí: $f(x_1) < f(x_2)$, resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$, resp. $f(x_1) > f(x_2)$, resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$.
funkce omezené	Funkce f se nazývá **zdola omezená na množině** $A \subseteq D(f)$, pokud existuje číslo d takové, že pro všechna $x \in A$ platí $f(x) \geq d$. Funkce f se nazývá **shora omezená na množině** $A \subseteq D(f)$, pokud existuje číslo h takové, že pro všechna $x \in A$ platí $f(x) \leq h$. Funkce f se nazývá **omezená na množině** $A \subseteq D(f)$, pokud je omezená zdola i shora.
maximum/minimum funkce	Řekneme, že funkce f má v bodě s **maximum**, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \leq f(s)$. Řekneme, že funkce f má v bodě t **minimum**, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \geq f(t)$.
funkce konvexní/konkávní	Řekneme, že funkce f je **konvexní** na intervalu $I \subset D(f)$, je-li množina $N_I(f) = \{[x, y] \mid x \in I, y \geq f(x)\}$ konvexní množina. Řekneme, že funkce f je **konkávní** na intervalu $I \subset D(f)$, je-li množina $P_I(f) = \{[x, y] \mid x \in I, y \leq f(x)\}$ konvexní množina.
funkce prostá	Funkce f se nazývá **prostá**, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.
funkce inverzní	**Inverzní funkcí** k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí: 1. $D(f^{-1}) = H(f)$ 2. Každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.
funkce složená	Pokud funkce g: $y = g(t)$ má definiční obor $D(g)$ a funkce f: $t = f(x)$ má obor hodnot $H(f)$ splňující podmínku $H(f) \subset D(g)$, pak funkci h: $y = g(f(x))$ nazýváme **složenou funkcí** a značíme $h = g \circ f$.

Základní vlastnosti funkcí

Příklad 1

Určete definiční obor funkce:

a) f_1: $y = 5x + 2$

b) f_2: $y = \dfrac{2}{x-5}$

c) f_3: $y = \dfrac{4}{x^2 - 5x + 6}$

řešení

a) f_1: $y = 5x + 2$

1. krok
Do výrazu $5x + 2$ můžeme za x dosadit libovolné reálné číslo a výraz má smysl.

2. krok
Odtud plyne, že $D(f_1) = (-\infty, \infty)$.

b) f_2: $y = \dfrac{2}{x-5}$

1. krok
Do výrazu $\dfrac{2}{x-5}$ můžeme za x dosadit jen taková čísla, aby hodnota výrazu $x - 5$ byla různá od nuly.

2. krok
Řešíme nerovnici $x - 5 \neq 0$

3. krok
Tedy $x \neq 5$.

4. krok
Odtud plyne, že $D(f_2) = (-\infty, 5) \cup (5, \infty)$.

c) f_3: $y = \dfrac{4}{x^2 - 5x + 6}$

1. krok
Do výrazu $\dfrac{4}{x^2 - 5x + 6}$ můžeme za x dosadit jen taková čísla, aby hodnota výrazu $x^2 - 5x + 6$ byla různá od nuly.

2. krok
Řešíme nerovnici $x^2 - 5x + 6 \neq 0$.

3. krok
Rozkladem výrazu na součin dostáváme $(x-2)(x-3) \neq 0$ a tedy $x \neq 2$ a $x \neq 3$.

4. krok
Odtud plyne, že $D(f_3) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$.