Konstrukční úlohy

Víš, že...

eukleidovskou konstrukcí rozumíme sestrojení útvaru pouze použitím pravítka, tj. nástroje, pomocí kterého narýsujeme rovnou čáru (bez stupnice k měření vzdálenosti), a kružítka?

základní eukleidovské konstrukce se skládají pouze z následujících kroků: spojení dvou bodů, určení průsečíku dvou přímek, konstrukce kružnice, která má daný střed a prochází daným bodem, resp. má daný poloměr, určení průsečíku dvou kružnic a určení společných bodů přímky a kružnice?

rozdělení úhlu na třetiny, tzv. *trisekce úhlu*, a sestrojení čtverce o stejném obsahu, jako má daný kruh, tzv. *kvadratura kruhu*, nejsou eukleidovské konstrukce?

Naučíš se...

rozlišovat úlohy polohové a nepolohové.

chápat význam jednotlivých částí konstrukční úlohy.

zapsat závěry z rozboru a konstrukční předpis.

principy jednotlivých metod řešení konstrukčních úloh.

Konstrukční úlohy

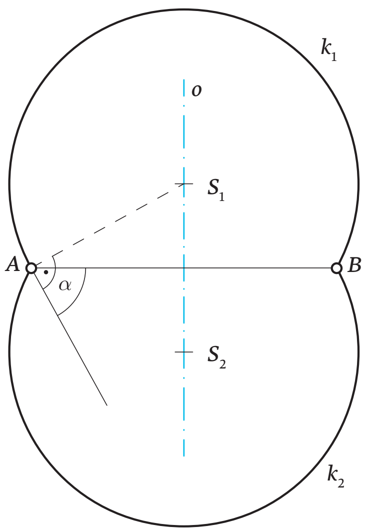
V každé geometrické **konstrukční úloze** jde o sestrojení geometrického útvaru daných vlastností, a to buď aspoň jednoho, nebo všech útvarů s požadovanými vlastnostmi. Konstrukční úloha se zpravidla rozpadne na hledání jednotlivých bodů, pomocí nichž se nám pak podaří útvar sestrojit. Přitom se používají **eukleidovské konstrukce**, tj. konstrukce pomocí pravítka a kružítka.

English Terms

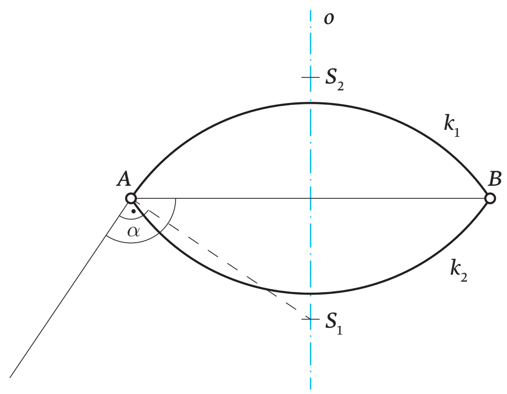
a construction problem / konstrukční úloha
analysis / rozbor
construction / konstrukce
proof / důkaz
check, verification / zkouška
discussion / diskuze

Přehled základních konstrukčních dovedností, které byste měli znát ze základní školy, resp. z předcházejících kapitol:

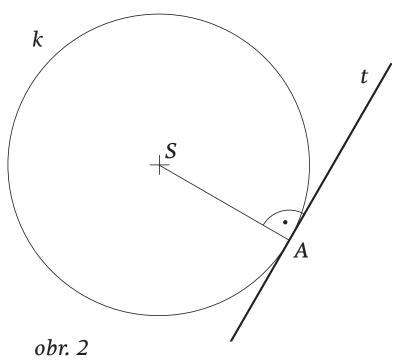
- přenesení úsečky, přenesení úhlu, přenesení trojúhelníku
- sestrojení středu a osy úsečky, sestrojení osy úhlu
- sestrojení kružnice trojúhelníku opsané a vepsané
- sestrojení kolmice daným bodem k dané přímce
- sestrojení rovnoběžky daným bodem s danou přímkou
- sestrojení přímky daným bodem, která má od dané přímky odchylku α
- sestrojení Thaletovy kružnice
- sestrojení kružnicových oblouků příslušných obvodovému úhlu o velikosti α *(obr. 1a, 1b)*
- sestrojení tečny kružnice v jejím daném bodě *(obr. 2)*
- sestrojení tečny kružnice z bodu, který leží vně kružnice *(obr. 3)*



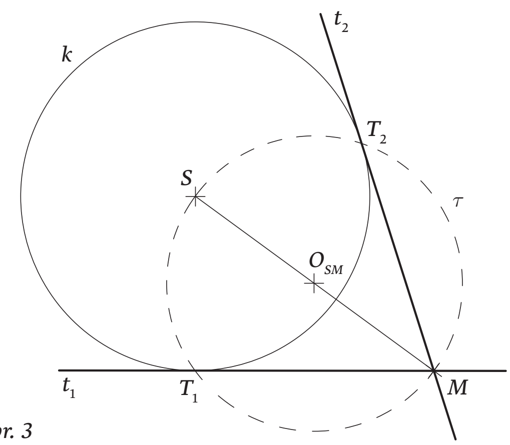
obr. 1a



obr. 1b



obr. 2



obr. 3

Konstrukční úlohy

zapamatujeme si

Řešení konstrukční úlohy se člení na čtyři části:
1. rozbor
2. konstrukce
3. zkouška
4. diskuze

1. **Rozbor** neboli **analýza úlohy** je ta část řešení, ve které předpokládáme, že je úloha řešitelná, tj. že má aspoň jedno řešení. Neboli že existuje aspoň jeden geometrický útvar požadovaných vlastností. Toto předpokládané řešení načrtneme a v načrtnutém obrázku označíme výrazně dané prvky. V další části rozboru hledáme podmínky, jimž musí vyhovovat neznámé body. Výsledky úvah kreslíme do náčrtu a zapisujeme pomocí geometrické symboliky. V jednoduchých úlohách můžeme rozbor vynechat.

2. **Konstrukce** vyplývá z podmínek pro neznámé body nalezených v rozboru. Jde o vyslovení **konstrukčního předpisu**, který je výčtem jednotlivých kroků postupně vedoucích k sestrojení neznámých bodů. Předpis zapíšeme symbolicky, resp. slovy, tj. vytvoříme **zápis konstrukce**. Posledním krokem zápisu je vždy sestrojení hledaného útvaru. Na základě konstrukčního předpisu pak můžeme konstrukci provést graficky, tj. pomocí pravítka a kružítka, resp. vhodného grafického softwaru (např. Geogebra).

3. Může se stát, že některé útvary sestrojené podle konstrukčního předpisu nevyhovují podmínkám úlohy, a nejsou tudíž řešením úlohy. Proto je třeba provést **zkoušku** (**důkaz konstrukce**), kterou útvary nevyhovující podmínkám úlohy vyloučíme. Někdy je důkaz proveden zároveň s rozborem, a proto není nutno provádět zvláštní důkaz.

4. **Diskuze** je část úlohy, kterou provádíme jen u konstrukčních úloh s parametry, tedy u úloh, v nichž jsou v zadání proměnné prvky. V těchto úlohách řešíme nikoli úlohu jedinou, ale celou množinu úloh. Diskuzi provádíme tak, že probíráme jednotlivé konstrukční kroky a zkoumáme, kdy a ke kolika výsledkům tyto dílčí konstrukce vedou. Při diskuzi je vhodné si pro jednotlivé případy kreslit náčrty. Výsledky diskuze můžeme zaznamenat v tabulce.

V souvislosti s určováním počtu řešení konstrukčních úloh rozlišujeme dvě základní skupiny konstrukčních úloh, **úlohy polohové** a **úlohy nepolohové**.

zapamatujeme si

- V polohových úlohách je předem dáno umístění (poloha) některých zadaných prvků hledaného útvaru a tím je určeno i umístění hledaných prvků.
- V nepolohových úlohách není předepsáno umístění žádného prvku, tj. hledanému útvaru jsou předepsány jen metrické vlastnosti. Při řešení nepolohové úlohy vždy nejdříve umístíme některý z daných prvků a tím ji převedeme na úlohu polohovou.

Například úloha „Je dána úsečka AB, $|AB| = c = 6$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí $a = 5$ cm, $t_c = 5$ cm.“ je polohová úloha s jedním neznámým bodem C. Začít musíme úsečkou AB, neboť je dána, a hledáme podmínky pro bod C.

Naproti tomu úloha „Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $c = 6$ cm, $a = 5$ cm, $t_c = 5$ cm.“ je úloha nepolohová. Můžeme začít umístěním úsečky AB, a tak ji převedeme na předcházející úlohu. Nebo začneme umístěním úsečky BC, $|BC| = a = 5$ cm, a tak řešíme úlohu se dvěma neznámými body S_c (střed strany AB) a A. Nebo začneme umístěním úsečky CS_c, $|CS_c| = t_c = 5$ cm a řešíme úlohu se dvěma neznámými body A a B.

Počet řešení polohové úlohy je roven počtu všech útvarů splňujících podmínky úlohy bez ohledu na to, zda jsou, nebo nejsou shodné. U nepolohových úloh nepovažujeme shodná řešení za různá.

Konstrukční úlohy

zapamatujeme si

Při řešení konstrukčních úloh se obvykle používají tyto metody:
1. metoda množin bodů dané vlastnosti
2. metoda geometrických zobrazení v rovině
3. metoda algebraická, tj. metoda konstrukce na základě výpočtu
4. metoda souřadnic, tj. metoda využívající analytickou geometrii

1. Řešení úloh **metodou množin bodů dané vlastnosti** spočívá v tom, že pro každý z hledaných bodů stanovíme dvě podmínky. Podmínkám odpovídají dvě množiny bodů dané vlastnosti. Hledaný bod náleží průniku těchto množin. Ukázku použití této metody máte například v řešeném příkladu 1.
   Metodu budeme používat v dalších kapitolách při řešení konstrukčních úloh o kružnici, trojúhelníku a čtyřúhelníku.

2. **Geometrická zobrazení** můžeme použít na část geometrického útvaru nebo na řešení celé konstrukční úlohy. V prvním případě můžeme objevit takové vztahy mezi danými a hledanými útvary, které bychom jinak „neodhalili“. Ve druhém případě aplikujeme zobrazení při rozboru na celý geometrický problém. S metodou geometrických zobrazení se seznámíte v kapitolách o shodných zobrazeních: Osová souměrnost, Středová souměrnost, Posunutí, Otočení a v kapitole o podobných zobrazeních: Stejnolehlost.

3. **Algebraická metoda** neboli metoda využívající výpočtu je založená na sestrojování úseček, jejichž délky jsou vyjádřeny algebraickými výrazy obsahujícími délky daných úseček. Tyto algebraické výrazy jsou řešením rovnic, které vyjadřují souvislosti mezi hledanými a danými útvary. Algebraickou metodu použijeme zejména tehdy, pokud jiné metody nevedou k cíli. Podrobnější pojednání o algebraické metodě najdete v kapitole Algebraické konstrukce.

4. **Metoda souřadnic** neboli metoda využívající analytickou geometrii je v principu shodná s metodou množin bodů dané vlastnosti, s tím rozdílem, že jak dané útvary, tak dané vlastnosti hledaných útvarů popisujeme analyticky, tj. rovnicemi či nerovnicemi mezi souřadnicemi. Výsledkem je analytické vyjádření hledaného útvaru.

souvislosti

Trisekce úhlu a *kvadratura kruhu* jsou dva ze tří nejslavnějších antických konstrukčních problémů (třetí je stereometrická úloha *duplicita krychle*). Souhrnně jsou všechny tři úlohy nazývány *Tři klasické problémy antické matematiky*. Úlohy byly formulovány již v 5. století př. n. l. a teprve v 19. století bylo dokázáno, že jsou eukleidovsky, tj. pravítkem a kružítkem, neřešitelné.
Provést **trisekci úhlu** znamená rozdělit úhel na třetiny, tj. k libovolnému úhlu sestrojit úhel o třetinové velikosti.
Kvadratura kruhu znamená nalezení strany čtverce, jehož obsah je roven obsahu daného kruhu.

Eukleidova socha v Přírodovědném muzeu Oxfordské univerzity

Konstrukční úlohy

Příklad 1

Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají dané přímky p a procházejí daným bodem M, pro který platí $|Mp| = 2\ \text{cm}$. Proveďte rozbor úlohy.

řešení

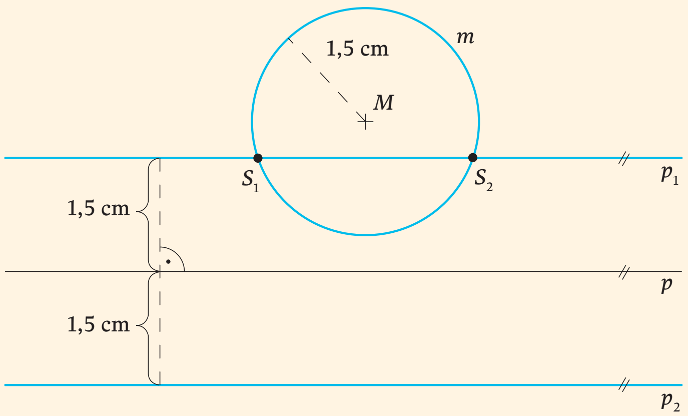
1. krok

Je to úloha polohová s jedním neznámým bodem, kterým je střed S hledané kružnice. Ta má mít podle zadání poloměr $r = 1{,}5$ cm. Současně se má kružnice dotýkat přímky p, proto bod S musí ležet na některé ze dvou přímek rovnoběžných s přímkou p ve vzdálenosti 1,5 cm od ní. Protože má kružnice procházet bodem M, bude bod S současně bodem kružnice o středu M a poloměru 1,5 cm.

2. krok

Zápis rozboru:

$$S\text{:}\ \left.\begin{array}{l} 1.\ |Sp| = 1{,}5\ \text{cm} \Rightarrow S \in p_1, p_2;\ p_1 \parallel p_2 \parallel p,\ |p_1p| = |p_2p| = 1{,}5\ \text{cm} \\ 2.\ |SM| = 1{,}5\ \text{cm} \Rightarrow S \in m(M; r = 1{,}5\ \text{cm}) \end{array}\right\} S \in (p_1 \cup p_2) \cap m$$



Příklad 2

Zapište konstrukční předpis k úloze z Příkladu 1 (Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají dané přímky p a procházejí daným bodem M, pro který platí $|Mp| = 2\ \text{cm}$.).

řešení

1. krok

1. $p, M; |Mp| = 2\ \text{cm}$

2. krok

2. $p_1, p_2;\ p_1 \parallel p_2 \parallel p,\ |p_1p| = |p_2p| = 1{,}5\ \text{cm}$

3. krok

3. $m;\ m\ (M;\ r = 1{,}5\ \text{cm})$

4. krok

4. $S;\ S \in (p_1 \cup p_2) \cap m$

5. krok

5. $k;\ k\ (S;\ r = 1{,}5\ \text{cm})$

Konstrukční úlohy

Příklad 3

The municipal councils of three villages – Albertov, Bruňany and Cepeřice decided to build an observation tower to attract more tourists in the region. They want to build the tower in a place that should be equally distant from all three villagges. The villages are not interconnected through a direct straight road (ie They don't lie on a line on the map). Identify such place.

solution

Step 1

Analysis:

This is clearly a geometry exercise: Construct a point S which is a centre of a circle passing through three not identical given points A, B and C not lying on one line. Or: Construct a circumcentre of a circumscribed circle of the triangle ABC.

Step 2

In this problem, we are looking for an unknown point S equidistant from points A, B, ie lying on the bisector of the line segment AB, and also equidistant from points B, C and therefore lying on the bisector of the line segment BC. This means that the point S is determined by two conditions – two sets of points, namely the bisector of the line segment AB and the bisector of the line segment BC. Point S is their intersection.

Step 3

Notation of the analysis:

$$S\!:\ \left.\begin{array}{l} 1.\ |AS| = |BS| \Rightarrow S \in o_{AB} \\ 2.\ |BS| = |CS| \Rightarrow S \in o_{BC} \end{array}\right\}\ S \in o_{AB} \cap o_{BC}$$

Step 4

Construction (notation of the construction):

1. Points A, B, C; points not lying on a line
2. o_{AB}
3. o_{BC}
4. S; $S \in o_{AB} \cap o_{BC}$

The correctness of the construction ensues from the analysis. The problem has always only one solution.