Osová souměrnost

Víš, že…

- symetrii lze nalézt téměř všude, v každém oboru vědy, v přírodě, v umění, v architektuře i v našich představách o morálce a spravedlnosti?
- v elementární eukleidovské geometrii o objektu říkáme, že je symetrický, jestliže je souměrný podle středu nebo podle osy nebo podle roviny souměrnosti?
- asymetrie neboli nesouměrnost je opak symetrie neboli souměrnosti?
- zejména barokní architekti vytvářeli celé části staveb, jejichž tvar byl určován osovou souměrností?

Naučíš se…

- princip shodného zobrazení.
- zobrazovat rovinné útvary v osové souměrnosti.
- řešit úlohy o odrazu a minimálním součtu vzdáleností.
- sestrojit příčku mezi dvěma útvary, která je k dané přímce kolmá a má na této přímce svůj střed.

Osová souměrnost

Shodná zobrazení

zapamatujeme si

Zobrazení Z v rovině je předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jeden bod X' roviny (Z: $X \rightarrow X'$). Bod X se nazývá **vzor**, bod X' jeho **obraz**. Množinu obrazů všech bodů útvaru nazýváme **obraz útvaru**.

English Terms

image / zobrazení, obraz
symmetry / souměrnost
axial symmetry / osová souměrnost
line of symmetry (axis of symmetry) / osa souměrnosti
self-conjugate point / samodružný bod
indirect isometry / nepřímá shodnost

Inverzní zobrazení k danému zobrazení **Z** je zobrazení $\mathbf{Z}^{-1}$, které naopak bodu X' přiřazuje bod X. Jestliže v zobrazení splývá bod se svým obrazem, nazývá se **samodružný bod** zobrazení. Jestliže obrazem útvaru je útvar, který s daným splývá, nazýváme útvar **samodružným útvarem** zobrazení.

zapamatujeme si

Shodné zobrazení (shodnost) je zobrazení, ve kterém pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = |XY|$.

V každém shodném zobrazení platí:

- Obrazem úsečky AB je shodná úsečka $A'B'$.
- Obrazem přímky AB je přímka $A'B'$.
- Obrazem polopřímky AB je polopřímka $A'B'$.
- Obrazem úhlu AVB je shodný úhel $A'V'B'$.
- Obrazem trojúhelníku ABC je shodný trojúhelník $A'B'C'$.
- Obrazem geometrického útvaru U je shodný útvar U'.

Dva geometrické útvary U a U' jsou shodné, právě když existuje shodné zobrazení, ve kterém je jeden obrazem druhého. Píšeme pak $U \cong U'$.
Názornou představu shodného zobrazení dává přemístění užitím průsvitky. Shodnost, v níž při přemisťování neobracíme průsvitku, je **přímá shodnost**; je-li třeba obrátit průsvitku, jde o **nepřímou shodnost**.

Druhy shodných zobrazení: osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí, otočení, posunutá souměrnost, identita.

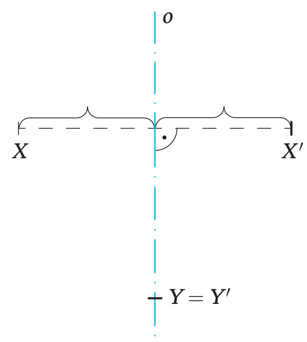
Osová souměrnost

zapamatujeme si

Osová souměrnost s osou o, nebo také souměrnost podle osy o *(obr. 1)*, je shodné zobrazení $\mathbf{O}(o)$, které přiřazuje**:**

- každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o,
- každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.

Přímka o se nazývá **osa souměrnosti**.



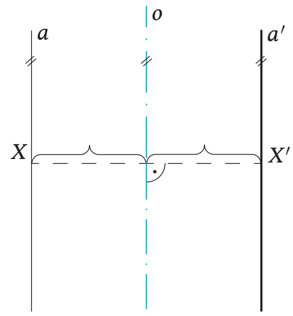
obr. 1

souvislosti

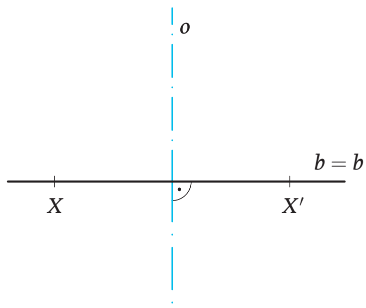
Maurits Cornelis Escher (17. června 1898, Leeuwarden – 27. března 1972, Hilversum) byl nizozemský umělec, známý svými kresbami a grafikami; v některých z nich využíval osovou souměrnost.

Osová souměrnost

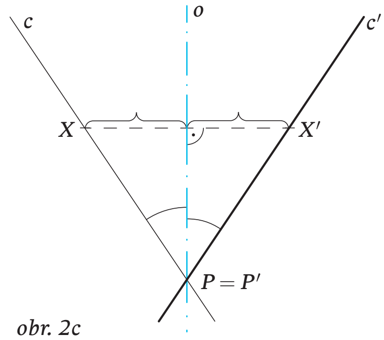
Obrazem přímky a, která je rovnoběžná s osou souměrnosti, je přímka a' rovnoběžná s osou souměrnosti (*obr. 2a*). Obrazem přímky b, která je k ose souměrnosti kolmá, je tatáž přímka, tj. $b' = b$ (*obr. 2b*). Obrazem přímky c, která není ani rovnoběžná s osou souměrnosti, ani není k ose souměrnosti kolmá, je přímka c', která se s přímkou c protíná na ose souměrnosti; přitom odchylka přímky c a osy souměrnosti je stejná jako odchylka přímky c' a osy souměrnosti (*obr. 2c*).



obr. 2a



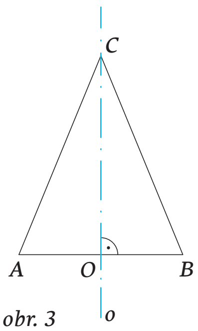
obr. 2b



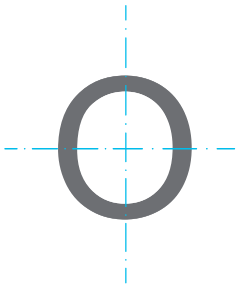
obr. 2c

Je zřejmé, že všechny body osy souměrnosti jsou **samodružné**, a tudíž osa souměrnosti je samodružná přímka. Samodružné jsou také všechny přímky kolmé k ose souměrnosti, ale na rozdíl od osy mají jen jeden samodružný bod, průsečík s osou.

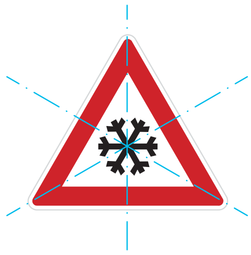
Jestliže souměrnost podle osy převádí útvar U ve stejný útvar $U' = U$, říkáme, že **útvar** U je **souměrný podle osy**, nebo také že je **osově souměrný**. Například rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB je souměrný podle osy úsečky AB (*obr. 3*). „Tiskací" písmeno O je souměrné podle dvou os souměrnosti (*obr. 4*), logo automobilky Volkswagen má jednu osu souměrnosti (*obr. 5*), dopravní značka „Náledí" má tři osy souměrnosti (*obr. 6*).



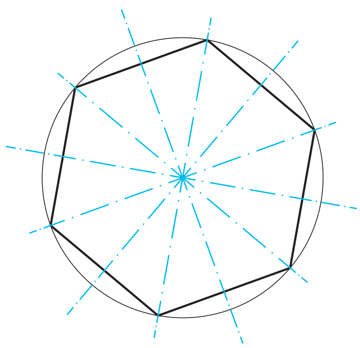
obr. 3

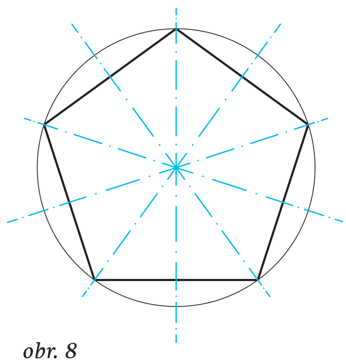

obr. 4


obr. 5


obr. 6

Každý pravidelný n-úhelník má právě n os souměrnosti. Je-li n sudé, jsou osy souměrnosti jednak spojnice protějších vrcholů, jednak spojnice středů protějších stran (na *obr. 7* pravidelný šestiúhelník). Je-li n liché, jsou osy souměrnosti spojnice vrcholů a středů protějších stran (na *obr. 8* pravidelný pětiúhelník).

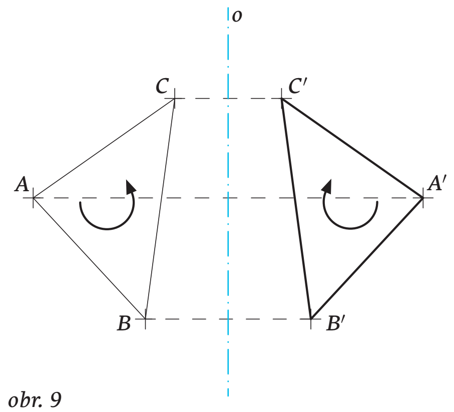

obr. 7


obr. 8

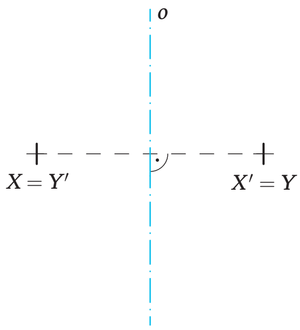
Osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti. Je také určena, známe-li dvojici bodů X, X', které jsou vzor a jeho obraz.

Osová souměrnost

Osová souměrnost je **nepřímá shodnost**. Znamená to, že osová souměrnost mění orientaci popisu trojúhelníku *(obr. 9)*. Inverzní zobrazení k osové souměrnosti podle osy o je tatáž osová souměrnost. Znamená to, že je-li bod X vzor a bod X' jeho obraz, pak pokud $Y = X'$, je $Y' = X$ *(obr. 10)*.

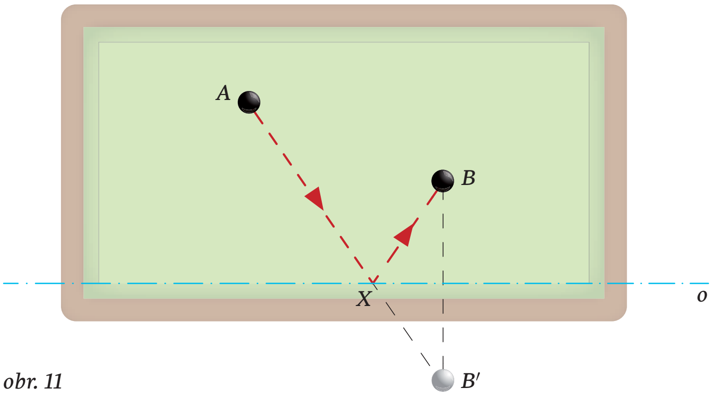


obr. 9

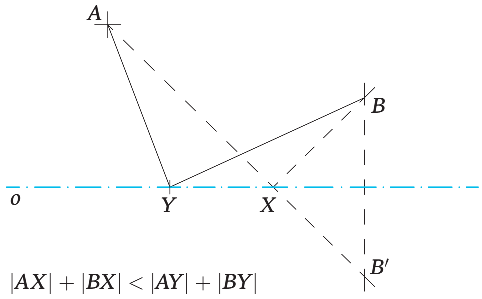


obr. 10

Osovou souměrnost využíváme k řešení úloh, v nichž „úhel dopadu = úhel odrazu“. Ty se vyskytují v případě kulečníku *(obr. 11)* či odrazu puku od mantinelu, resp. spojení bodů lomenou čarou o minimální délce *(obr. 12)*.

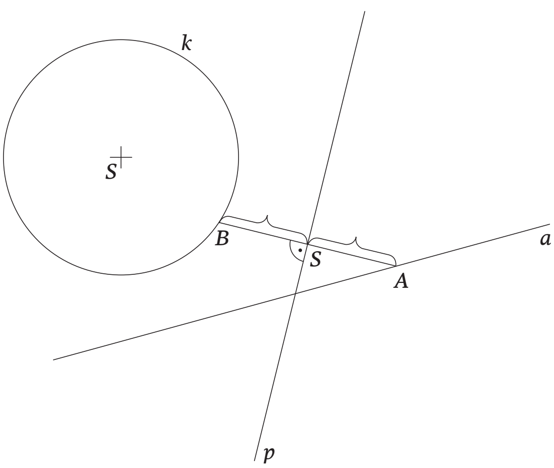


obr. 11

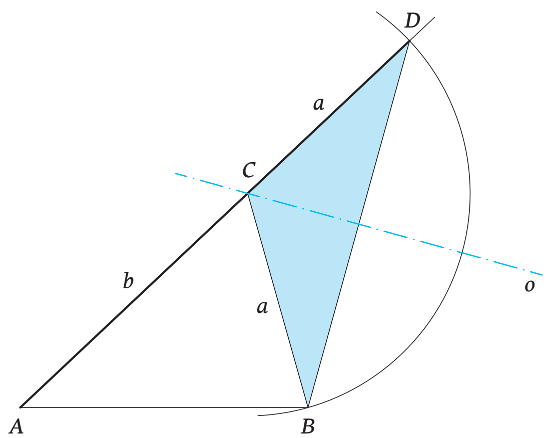


obr. 12

Další využití osové souměrnosti je v úlohách, kdy je třeba sestrojit příčku mezi dvěma útvary, která je k dané přímce kolmá a má na ní svůj střed (na *obr. 13* příčka mezi kružnicí k a přímkou a).
Skutečnost, že rovnoramenný trojúhelník je osově souměrný, můžeme využít v úlohách na konstrukci trojúhelníků, resp. čtyřúhelníků, je-li některý ze zadaných prvků součet či rozdíl stran nebo úhlů *(obr. 14)*.



obr. 13



obr. 14

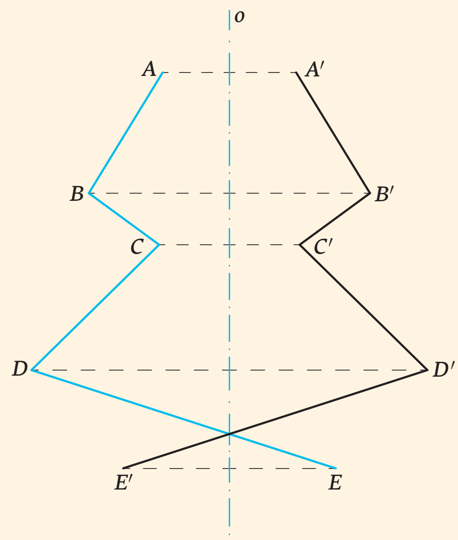
Osová souměrnost

Příklad 1

V osové souměrnosti s osou o sestrojte obraz lomené čáry $ABCDE$.

řešení

Postupujeme podle definice osové souměrnosti – každým vrcholem lomené čáry vedeme kolmici k přímce o a jeho vzdálenost od přímky o „přeneseme na opačnou stranu“, neboť víme, že pata kolmice je středem úsečky „vzor – obraz“.



Příklad 2

a) Plot the following set of points: [5; 0], [1; 0], [4; 1], [4; 4], [2; 4], [1; 7], [1; 9], [5; 9]. Join them up in the order they are given.

b) Plot the image of each point reflected in the axis PQ, P[5; 0], Q[5; 9]. Join them up to create a symmetrical picture.

c) When done, write down the coordinates of the image points in order.

d) Which coordinates stay the same?

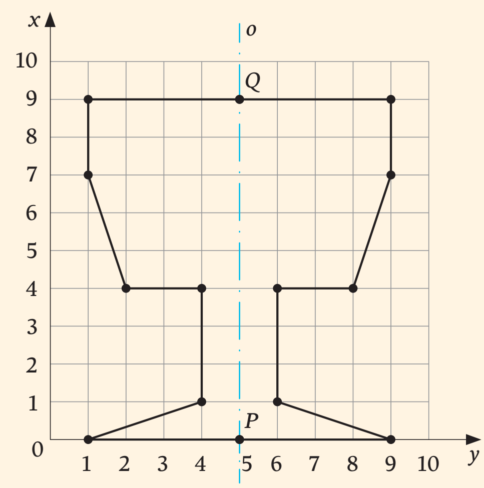
solution

Step 1
We plot the given set of points and join them up with a broken line.

Step 2
We plot the images of the points reflected in the axis PQ and join them up.

Step 3
Coordinates of the point images are [5; 0], [9; 0], [6; 1], [6; 4], [8; 4], [9; 7], [9; 9], [5; 9].

Step 4
The first and last point of the picture, ie points P and Q, are self-conjugate, ie coordinates of both the points and their images are the same.



Osová souměrnost

Příklad 3

Jsou dány dvě různoběžky p a o. Sestrojte co nejúspornějším způsobem obraz přímky p v osové souměrnosti s osou o.

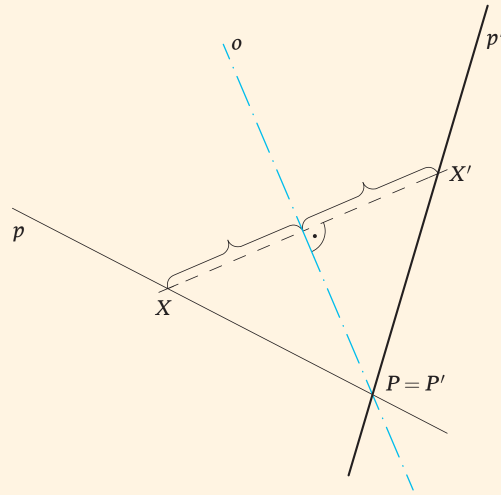
řešení

1. krok
Přímka je určena dvěma různými body.

2. krok
Průsečík P přímky p s osou souměrnosti o je samodružný bod, tj. $P' = P$.

3. krok
Stačí proto zobrazit jeden bod X přímky p, $X \neq P$.

Poznámka: Pokud průsečík přímek p a o leží mimo nákresnu, nezbývá, než zobrazit její dva libovolné body.



Příklad 4

Jsou dány přímky a, b, c a o, $a \perp o$, $b \parallel o$, c je různoběžná s a, $c \not\perp b$. Sestrojte co nejúspornějším způsobem obrazy přímek a, b, c v osové souměrnosti s osou o.

řešení

1. krok
Přímka a je kolmá k ose souměrnosti, její obraz je proto přímka totožná, tj. $a' = a$.

2. krok
Určíme bod B' jako obraz průsečíku B přímek b a c.

3. krok
Přímka b je rovnoběžná s osou souměrnosti, její obraz je přímka b' také rovnoběžná s osou souměrnosti.

4. krok
Průsečík P přímky c s osou souměrnosti je samodružný bod, tj. $P' = P$ a je tedy jedním bodem přímky c'. Dalším bodem přímky c' je bod B'.