Goniometrie – základní pojmy

Víš, že…

- pro úhly v geodézii se místo šedesátinného dělení používá častěji dělení setinné, v němž je plný úhel rozdělen na 400 gradů?
- obloukovou lampu významně zdokonalil český vynálezce František Křižík (1847–1941)?
- jednotkovou kružnici najdeme i na pražském orloji?

Naučíš se…

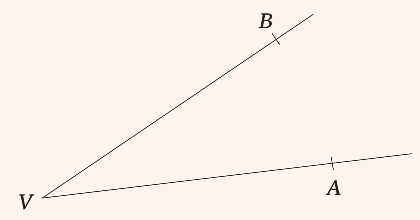
- pracovat s orientovanými úhly.
- určit velikost úhlu pomocí obloukové míry.
- převádět stupně na radiány a naopak.

Goniometrie – základní pojmy

S pojmem úhel jste se setkali již v geometrii na základní škole, většina z vás tento pojem zná a umí s ním intuitivně pracovat. Například víte, že velikost úhlu můžeme měřit ve stupních, pravý úhel má 90° atd. Přesto však přesná matematická definice úhlu není úplně jednoduchá a skrývá v sobě jistá úskalí. S popisem úhlu a jeho některými vlastnostmi jsme se seznámili také v tématu Planimetrie (Základní planimetrické pojmy a poznatky). Obvykle je úhel definován následovně:

zapamatujeme si

Úhel *AVB* (značíme $\measuredangle AVB$) je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami, které mají společný počátek. Polopřímky *VA* a *VB* nazýváme **ramena úhlu**, bod *V* nazýváme **vrchol úhlu**.

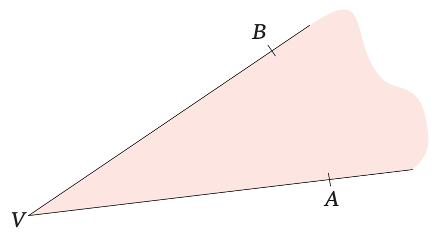


English Terms

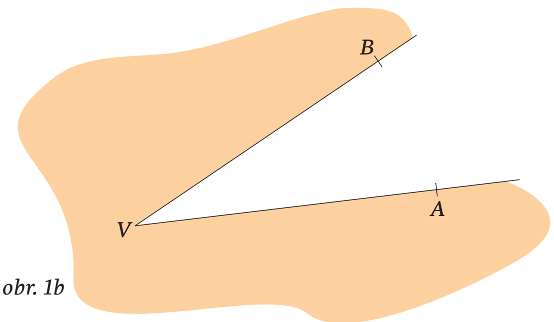
goniometry / goniometrie
angle / úhel
arm of angle / rameno úhlu
vertex of angle / vrchol úhlu
anticlockwise direction / proti směru hodinových ručiček
clockwise direction / po směru hodinových ručiček
radian / radián
arc / oblouk
length of an arc of a circle / délka kruhového oblouku
unit circle / jednotková kružnice
perigon / plný úhel

Pozor! Uvědomte si zejména, že:

- úhel nejsou pouze dvě ramena *VA* a *VB*, nýbrž část roviny mezi oběma rameny.
- bez dalšího vysvětlení ale není zřejmé, kterou část roviny máme na mysli, protože polopřímky *VA* a *VB* vymezují dva různé úhly – konvexní úhel *(obr. 1a)* a nekonvexní úhel *(obr. 1b)*.



obr. 1a



obr. 1b

Orientovaný úhel a jeho velikost

V další matematice, ale zejména fyzice a technických aplikacích, však s předchozí definicí úhlu nevystačíme. Zkoumáme-li například otáčení těles, pohyb bodu po kružnici, vlnění atd., je obvykle důležité, zda se pohybujeme z bodu *A* do bodu *B* nebo naopak. Není tedy důležitý jen samotný pohyb mezi body *A* a *B*, ale svou roli hraje také jeho „orientace". Z těchto důvodů označujeme jednu polohu (jedno z ramen úhlu) jako počáteční rameno a druhé z ramen nazveme ramenem koncovým. Tak vzniká pojem orientovaný úhel.

zapamatujeme si

Uspořádaná dvojice polopřímek *VA*, *VB* se nazývá **orientovaný úhel *AVB***, značíme $\widehat{AVB}$. Polopřímku *VA* nazveme **počátečním ramenem**, polopřímku *VB* označujeme jako **koncové rameno** a bod *V* se nazývá **vrchol** orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.

Goniometrie – základní pojmy

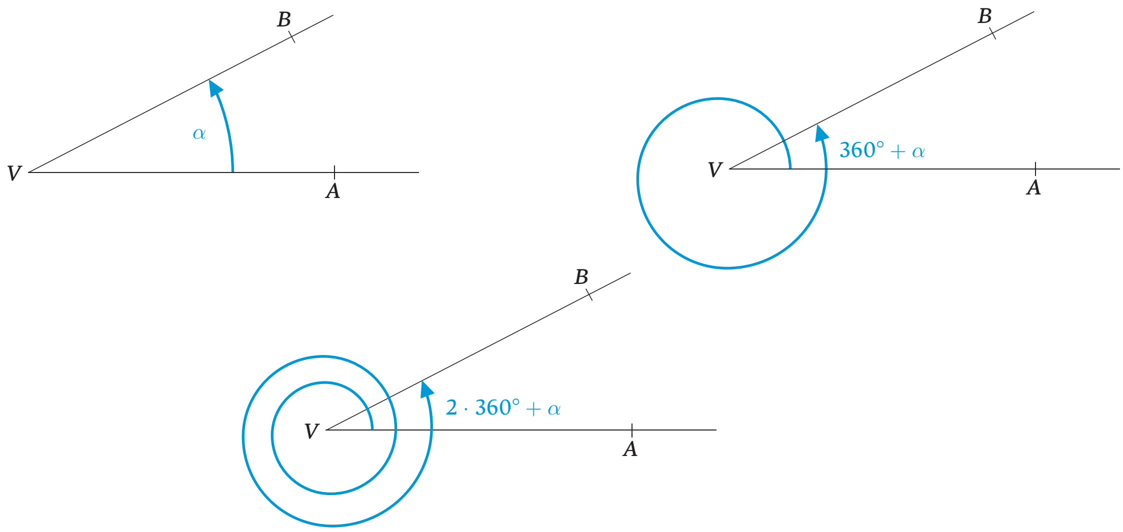
V souladu s fyzikální interpretací (počáteční a koncový stav nějakého tělesa) si lze orientovaný úhel představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky, která se otáčí kolem vrcholu *V*. Otáčíme-li polopřímku proti směru hodinových ručiček, mluvíme o kladném směru otáčení, zatímco při otáčení po směru hodinových ručiček budeme mluvit o záporném směru otáčení *(obr. 2)*.

obr. 2

Na *obr. 3* vidíme, že polopřímka *VA* může přejít do polohy *VB* buď v kladném směru (otočením o úhel α), nebo v záporném směru (otočením o úhel $360° - \alpha$).

obr. 3

To ale není všechno. Zvolíme-li třeba kladný směr otáčení, pak polopřímku *VA* můžeme otočit kolem vrcholu *V* z její počáteční polohy do koncové polohy *VB* nekonečně mnoha způsoby, jak naznačuje *obr. 4*.



obr. 4

Z *obr. 4* je patrné, že zatímco velikost úhlu (vyjádřená ve stupních) je číslo z intervalu $\langle 0, 360)$, velikost orientovaného úhlu může být libovolně velké (kladné i záporné) číslo. Přesto ale vidíme, že orientované úhly na *obr. 4* mají něco společného, a to je úhel α. To nás přivádí k definici základní velikosti orientovaného úhlu:

zapamatujeme si

Základní velikostí orientovaného úhlu β rozumíme velikost úhlu α, pro který platí:

1. $\beta = \alpha + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$,
2. $\alpha \in \langle 0°, 360°)$.

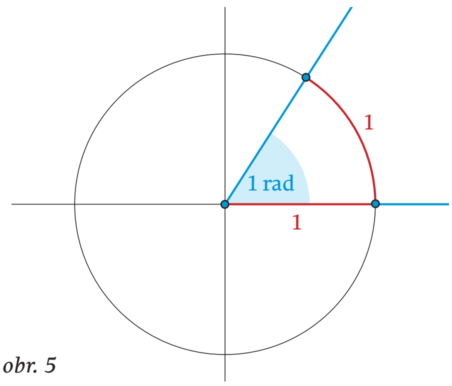
Goniometrie – základní pojmy

Přestože nám připadá měření úhlů ve stupňové míře přirozené a názorné, existuje i jiný způsob, jak měřit velikosti úhlů. Ten vychází z myšlenky měřit velikost úhlu pomocí délky kruhového oblouku, proto hovoříme o **obloukové míře**. Základní jednotkou obloukové míry je **radián**. Radián je nejběžněji užívaná jednotka velikosti úhlu nejen v matematice, ale zejména v aplikacích v přírodních vědách. Důvodem je skutečnost, že užití radiánů dovoluje velmi jednoduché formulace řady matematických tvrzení. O této skutečnosti se přesvědčíme v následujících kapitolách.

zapamatujeme si

Radián je středový úhel, kterému přísluší na kružnici oblouk délky poloměru. Radiány budeme označovat zkratkou „rad".

Obvykle se pracuje s tzv. **jednotkovou kružnicí**, tj. kružnicí, jejíž poloměr má délku 1. Úhel o velikosti 1 rad je vyznačen na *obr. 5* – jde o úhel, který na jednotkové kružnici vytíná oblouk jednotkové délky.



obr. 5

Vzniká přirozená otázka: kolik radiánů má „celá kružnice"? Hledáme tedy vzájemný vztah mezi stupni a radiány.

Ze základní školy víme, že délka kružnice s poloměrem r je rovna $2\pi r$, a tedy délka kružnice s poloměrem 1 je 2π. Z definice radiánu tedy vyplývá, že 360° (plný úhel) je rovno 2π radiánů. Tak dostáváme základní vztah, který nám umožňuje převádět stupně na radiány a naopak.

zapamatujeme si

- $360° = 2\pi\,\text{rad}$
- $1° = \dfrac{2\pi}{360}\,\text{rad} = \dfrac{\pi}{180}\,\text{rad}$
- $1\,\text{rad} = \dfrac{360°}{2\pi} = \dfrac{180°}{\pi} \doteq 57{,}296°$

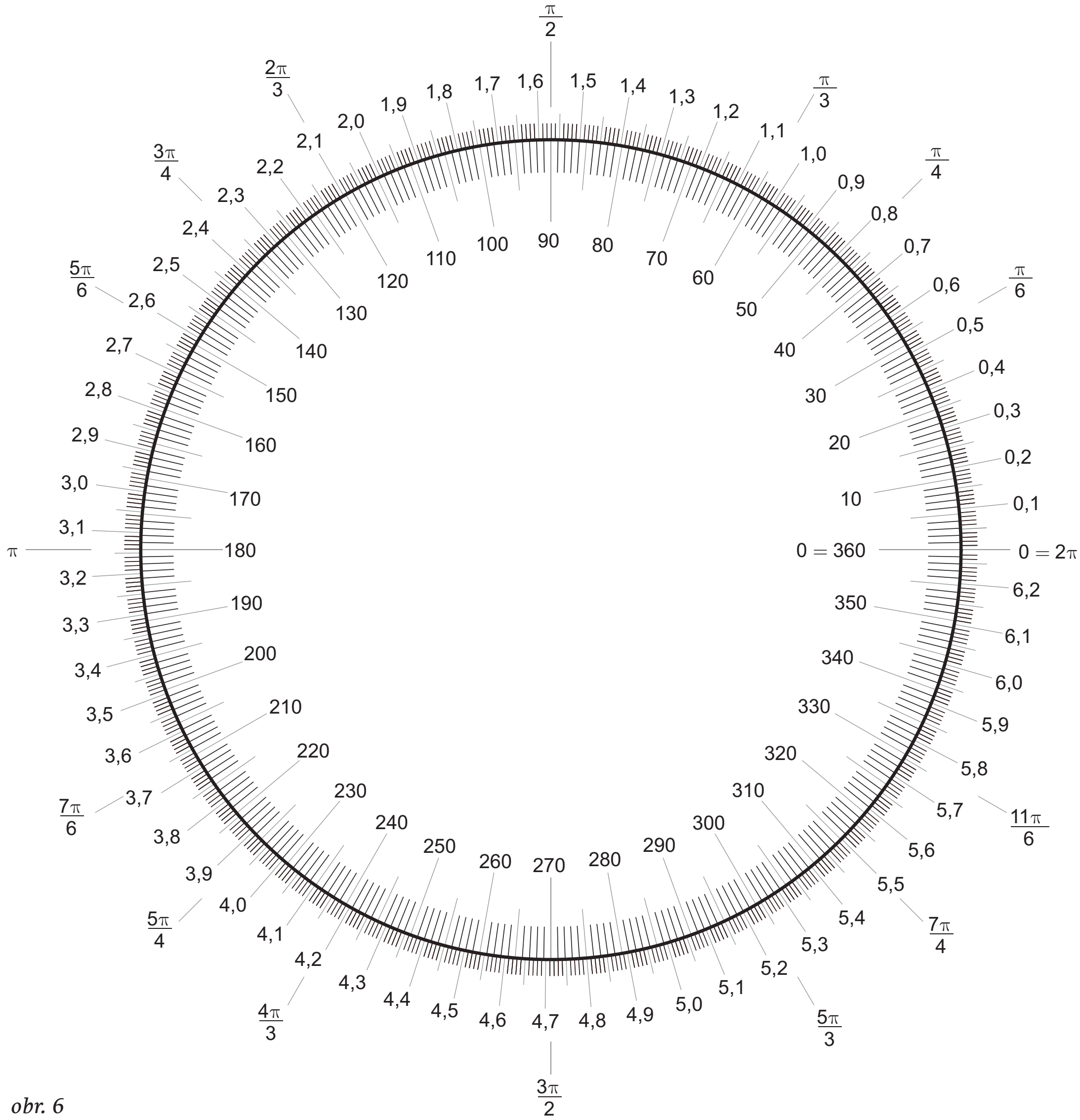
Nejčastěji užívané velikosti úhlů vyjádřené ve stupních a radiánech jsou v následující tabulce:

stupně	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270
radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

Poznámka: Při zápisech velikostí úhlů v radiánech obvykle vynecháváme značku rad (zapisujeme jen číselnou hodnotu velikosti).

Goniometrie – základní pojmy

Převodní vztahy mezi stupni a radiány jsou vyjádřeny na *obr. 6*.



obr. 6

Podobně jako v případě, kdy velikost orientovaného úhlu vyjadřujeme ve stupních, zavedeme základní velikost orientovaného úhlu měřeného v radiánech:

zapamatujeme si

Základní velikostí orientovaného úhlu β rozumíme velikost úhlu α, pro který platí:

1. $\beta = \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
2. $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$.

souvislosti

Goniometrie je slovo řeckého původu (*gónia* = úhel, *metró* = měřím) a označuje oblast matematiky, která se zabývá goniometrickými funkcemi sinus, kosinus, tangens a kotangens. Její důležitou součástí je **trigonometrie**, která se věnuje užití těchto funkcí při řešení různých úloh o trojúhelnících.

Goniometrie – základní pojmy

Příklad 1

Určete základní velikost orientovaných úhlů:

a) $1\,000°$

b) $-1\,290°$

c) $119\,790°$

řešení

a) $1\,000°$

1. krok

Číslo 1 000 je větší než 360, tj. odečteme 360.

2. krok

$1\,000 - 360 = 640$

3. krok

Číslo 640 je větší než 360, tj. odečteme 360.

4. krok

$640 - 360 = 280 < 360$

závěr

Základní velikost úhlu $1\,000°$ je úhel $280°$.

b) $-1\,290°$

1. krok

Číslo $-1\,290$ je menší než 0, tj. přičteme 360.

2. krok

$-1\,290 + 360 = -930$

3. krok

Číslo -930 je menší než 0, tj. přičteme 360.

4. krok

$-930 + 360 = -570$

5. krok

Číslo -570 je menší než 0, tj. přičteme 360.

6. krok

$-570 + 360 = -210$

7. krok

Číslo -210 je menší než 0, tj. přičteme 360.

8. krok

$-210 + 360 = 150$

závěr

Základní velikost úhlu $-1\,290°$ je úhel $150°$.

c) $119\,790°$

1. krok

Číslo 119 790 je veliké, a proto použít analogický postup jako v bodech a) a b) je zde z časových důvodů nemožné.

2. krok

Pro základní velikost úhlu platí:

$119\,790° = \alpha + k \cdot 360°$

3. krok

Odtud plyne: $\alpha = 119\,790° - k \cdot 360°$

4. krok

Hodnotu k vypočteme dělením čísla 119 790 číslem 360.

5. krok

$\dfrac{119\,790}{360} = 332{,}7\ldots$

6. krok

Odtud plyne, že $k = 332$ (tj. největší celé číslo menší než číslo 332,7...).

7. krok

Tedy $\alpha = 119\,790° - 332 \cdot 360° = 270°$.

závěr

Základní velikost úhlu $119\,790°$ je úhel $270°$.