Základní stereometrické poznatky

Víš, že…

- stereometrie je prostorová geometrie, tj. geometrie zabývající se útvary, které nelze umístit do roviny, a vlastnostmi takových útvarů?
- základními stereometrickými pojmy jsou bod, přímka a rovina?
- slovo stereometrie je řeckého původu a jeho volný překlad je měření těles?
- s prvními stereometrickými poznatky se setkáváme u vyspělých národů žijících v údolích velkých řek Nil, Eufrat a Tigris?
- čtyřnohý stůl se může kývat, ale trojnohý ne?

Naučíš se…

- správně vnímat základní geometrické pojmy, tj. bod, přímku a rovinu a jejich části.
- určit přímku a rovinu.
- používat geometrickou symboliku.

Základní stereometrické poznatky

Ve stereometrii jsou předmětem zkoumání prostorové útvary. Základními pojmy jsou **bod, přímka** a **rovina**. Bod, přímka a rovina jsou útvary myšlené, vznikají v našem vědomí abstrakcí poznatků reálného světa – bod z drobných předmětů (například zrnka písku), přímka z napnutých tenkých předmětů (například provázek), rovina z napjatých tenkých ploch (například list papíru, mořská hladina). Podle Eukleida je bod „to, co nemá délku, šířku ani výšku, přímka má jen délku, rovina má jen délku a šířku".

Body a přímky znázorňujeme stejně jako v planimetrii *(obr. 1)*, rovinu libovolným rovinným útvarem, nejčastěji rovnoběžníkem *(obr. 2)*. V případě přímky a roviny, které obsahují nekonečně mnoho bodů, znázorňujeme vždy jen jejich část. Body a přímky označujeme stejně jako v planimetrii, body velkými písmeny (A, B, C, ...), přímky malými písmeny (a, b, p, ...). Roviny označujeme malými písmeny řecké abecedy (α, β, ρ, ...).

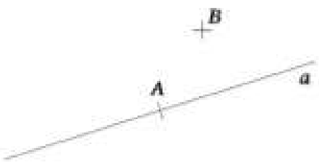
obr. 1

obr. 2

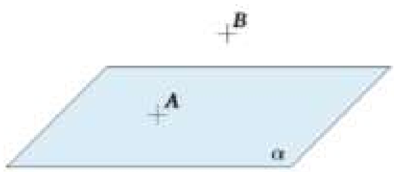
English Terms

solid geometry (stereometry) stereometrie
point bod
line přímka
plane rovina
half plane polorovina
space prostor
halfspace poloprostor
incidence incidence

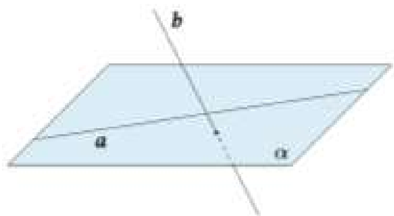
Je-li bod A bodem přímky a *(obr. 3)*, říkáme, že „ bod A leží na přímce a" nebo „přímka a prochází bodem A" a píšeme $A \in a$. Bod B na přímce a neleží, píšeme $B \notin a$. Podobně, je-li bod A bodem roviny α *(obr. 4)*, říkáme, že „bod A leží v rovině α" nebo „rovina α prochází bodem A" a píšeme $A \in \alpha$. Bod B v rovině α neleží, píšeme $B \notin \alpha$. Výrok „ přímka a leží v rovině α" nebo „rovina α prochází přímkou a" znamená, že každý bod přímky a je také bodem roviny α *(obr. 5)*; zapisujeme $a \subset \alpha$. Přímka b v rovině α neleží, píšeme $b \not\subset \alpha$.
Pro vyjádření všech uvedených vztahů mezi body, přímkami a rovinami používáme společný termín **„je incidentní"**, tj. „bod je incidentní s přímkou", bod, případně přímka, je incidentní s rovinou".



obr. 3



obr. 4



obr. 5

zapamatujeme si

- **Přímka je určena dvěma různými body** neboli jinými slovy: **Dvěma různými body prochází jediná přímka.**
  Na *obr. 6* je přímka a určena body A, B; symbolicky: $a = \leftrightarrow AB$.
- **Rovina je určena třemi různými body, které neleží v přímce** neboli jinými slovy: **Třemi různými body, které neleží v přímce, prochází jediná rovina.**
  Na *obr. 7* je rovina α určena body A, B, C; symbolicky: $\alpha = \leftrightarrow ABC$.

obr. 6

obr. 7

Základní stereometrické poznatky

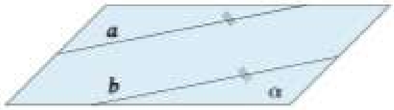
Z určenosti roviny pomocí tří bodů vyplývá, že trojnohý stůl se nebude nikdy kývat, ale čtyřnohý může, neboť tři body vždy leží v jedné rovině, ale čtyři body v jedné rovině ležet nemusí.

Další možné způsoby určení roviny jsou:

- Rovina je určena bodem a přímkou, která tímto bodem neprochází. Na *obr. 8* je rovina α určena bodem A a přímkou a, $A \notin a$; symbolicky: $\alpha = \leftrightarrow Aa$.
- Rovina je určena dvěma přímkami, které jsou různoběžné, resp. rovnoběžné (různé). Na *obr.9ab* je rovina α určena přímkami a, b; $\alpha = \leftrightarrow ab$.

obr. 8

obr. 9a

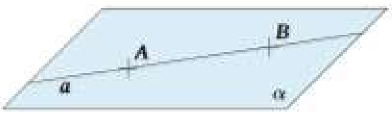


obr. 9b

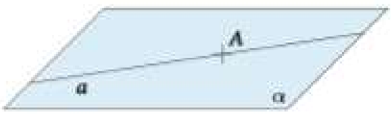
Vlastnosti základních vztahů mezi body, přímkami a rovinami vyjadřují tyto jednoduché věty:

zapamatujeme si

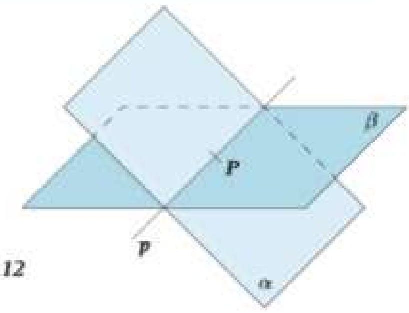
- **Leží-li dva různé body přímky v rovině, leží v rovině všechny body této přímky.** Na *obr. 10* leží body A a B současně na přímce a a v rovině α, a to znamená, že v rovině α leží všechny body přímky AB; symbolicky: $[(A \in a \wedge A \in \alpha) \wedge (B \in a \wedge B \in \alpha)] \Rightarrow \leftrightarrow AB \subset \alpha$.
- **Jestliže bod leží na přímce a tato přímka leží v rovině, leží i bod v této rovině.** Na *obr. 11* je bod A bodem přímky a, přímka a leží v rovině α, a to znamená, že bod A je také bodem roviny α; symbolicky: $(A \in a \wedge a \subset \alpha) \Rightarrow A \in \alpha$.
- **Dvě různé roviny, které mají společný bod, mají společnou přímku, která tímto bodem prochází, a kromě této přímky nemají žádný další společný bod.** Na *obr. 12* mají roviny α a β společný bod P, tj. mají společnou přímku p, která prochází bodem P; symbolicky: $(P \in \alpha \cap \beta) \Rightarrow (\alpha \cap \beta = p \wedge P \in p)$.



obr. 10



obr. 11



obr. 12

Z planimetrie víme, že bod dělí přímku na dvě navzájem opačné **polopřímky** a je jejich společným počátkem. Přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné **poloroviny** a je jejich společnou hraniční přímkou. Libovolná rovina dělí prostor na dva navzájem opačné **poloprostory** a je jejich společnou hraniční rovinou. Polopřímku s počátkem P a vnitřním bodem A značíme $\mapsto PA$ *(obr. 13)*, polorovinu s hraniční přímkou p a vnitřním bodem A značíme $\mapsto pA$ *(obr. 14)* a poloprostor s hraniční rovinou ρ a vnitřním bodem A značíme $\mapsto \rho A$ *(obr. 15)*.

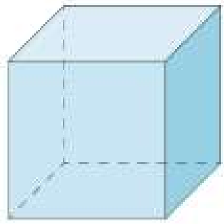
obr. 13

obr. 14

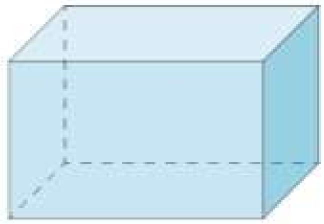
obr. 15

Základní stereometrické poznatky

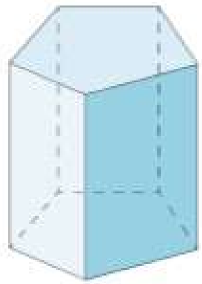
K modelování prostorových vztahů budeme využívat nejčastěji krychli. **Krychle** *(obr. 16)* je jedním z pěti pravidelných mnohostěnů, všechny její stěny jsou čtverce. Dalším známým tělesem je **kvádr** *(obr. 17)*. Je to těleso, jehož protější stěny jsou shodné obdélníky. Krychle i kvádr patří mezi **hranoly** *(obr. 18)*. Podstavami hranolů jsou shodné mnohoúhelníky, bočními stěnami rovnoběžníky. V případě pravidelných hranolů jsou podstavami pravidelné mnohoúhelníky a bočními stěnami shodné obdélníky.



obr. 16

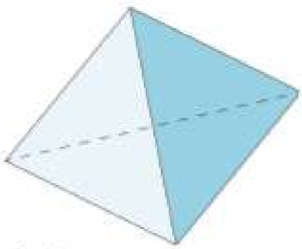


obr. 17

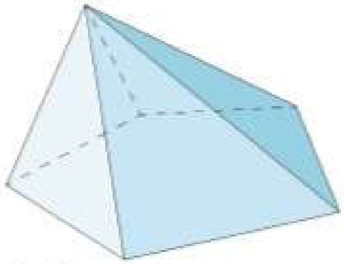


obr. 18

Vhodným tělesem pro modelování je i **čtyřstěn** *(obr. 19)*. Stěny čtyřstěnu jsou trojúhelníky, v pravidelném čtyřstěnu trojúhelníky rovnostranné. Zvolíme-li u čtyřstěnu jednu ze stěn jako podstavu, dostaneme trojboký jehlan. Obecně je **jehlan** *(obr. 20)* těleso, jehož podstavou je mnohoúhelník a bočními stěnami trojúhelníky. V případě pravidelných jehlanů je podstavou pravidelný mnohoúhelník a bočními stěnami jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky.



obr. 19



obr. 20

souvislosti

Eukleidovy *Základy* (řecky Stoicheia) jsou učebnicí matematiky, která se skládá ze třinácti kapitol, nazývaných knihy. Eukleides v nich shromáždil a uspořádal elementy pro rovinnou a prostorovou geometrii.

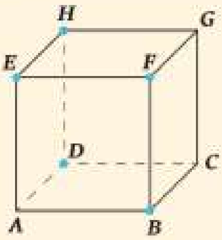
Eukleides

Základní stereometrické poznatky

Příklad 1

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Kolik různých přímek je určeno vrcholy *B*, *D*, *E*, *F*, *H*?

řešení



1. krok
Přímka je určena dvěma různými body.

2. krok
Při spojování bodů nezáleží na pořadí.

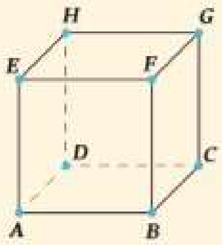
3. krok
Každý z pěti daných bodů lze spojit s kterýmkoli ze zbývajících čtyř.

4. krok
Počet různých přímek určených vrcholy *B*, *D*, *E*, *F* a *H* je tedy $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Příklad 2

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Kolik různých přímek je určeno všemi vrcholy krychle?

řešení



1. krok
Přímka je určena dvěma různými body.

2. krok
Při spojování bodů nezáleží na pořadí.

3. krok
Krychle má 8 vrcholů.

4. krok
Každý z vrcholů lze spojit s kterýmkoli ze zbývajících sedmi.

5. krok
Počet různých přímek určených vrcholy krychle je tedy $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.