Metrické vlastnosti

Víš, že…

René Descartes (1596–1650) se podílel na vytvoření číselné reprezentace geometrických objektů známé jako kartézská soustava souřadnic?

kartézskou soustavu souřadnic tvoří trojice navzájem kolmých číselných os, přímek x, y, z, se společným počátkem, bodem O?

trojice navzájem kolmých rovin, půdorysna, nárysna a bokorysna, je užitečná pro matematiku, deskriptivní geometrii, a zejména pro technickou praxi?

svahoměr patří mezi nivelační přístroje a slouží k měření sklonu svahu?

světelný rok je jednotka délky, a ne času?

Naučíš se…

rozhodovat o kolmosti přímek a rovin.

určovat odchylky přímek a rovin.

určovat vzdálenosti bodů, přímek a rovin.

Metrické vlastnosti

Metrické vlastnosti přímek a rovin se opírají o shodnost úseček a úhlů. Metrickými vlastnostmi rozumíme odchylky přímek a rovin a vzdálenosti přímek a rovin. Mezi metrické vlastnosti řadíme i kolmost přímek a rovin.

Odchylka přímek

Dvě rovnoběžné nebo různoběžné přímky vždy leží v rovině, a proto odchylku dvou přímek v těchto případech definujeme stejně jako v planimetrii. Odchylku dvou mimoběžných přímek v prostoru definujeme pomocí vhodných různoběžných přímek.

English Terms

- **deflection** odchylka
- **perpendicularity** kolmost
- **distance** vzdálenost
- **point** bod
- **line** přímka
- **plane** rovina

zapamatujeme si

- Jsou-li a, b dvě rovnoběžné přímky, je jejich odchylka 0° (0 rad).
- Jsou-li a, b dvě různoběžné přímky, je jejich odchylka velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky svírají.
- Jsou-li a, b dvě mimoběžné přímky, je jejich odchylkou odchylka různoběžných přímek, které procházejí libovolným bodem prostoru a jsou s danými mimoběžkami rovnoběžné.

Definice odchylky dvou mimoběžných přímek se opírá o samozřejmou větu:

zapamatujeme si

Dva ostré úhly jsou shodné, jestliže jejich ramena jsou po řadě spolu rovnoběžná.

V důsledku této věty nezávisí odchylka mimoběžek na volbě bodu, kterým s danými mimoběžkami vedeme rovnoběžky. Často se tento bod volí na jedné z mimoběžek.

Je-li φ odchylka přímek a, b, píšeme $\varphi = |\sphericalangle ab|$; přitom $\varphi \in \langle 0°; 90° \rangle$, resp. $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Při určování odchylky konstrukčně i početně obvykle hledáme trojúhelník, v němž je úhel daných přímek, případně úhel k němu vedlejší jedním vnitřním úhlem.

Kolmost přímek

zapamatujeme si

Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, je-li jejich odchylka 90°.

Jsou-li přímky a, b k sobě kolmé, píšeme $a \perp b$, příp. $b \perp a$. *Dvě úsečky* jsou navzájem kolmé, jsou-li přímky, na kterých leží, navzájem kolmé.

Kolmost přímky a roviny

zapamatujeme si

Přímka a rovina jsou k sobě kolmé právě tehdy, když je daná přímka kolmá ke každé přímce roviny.

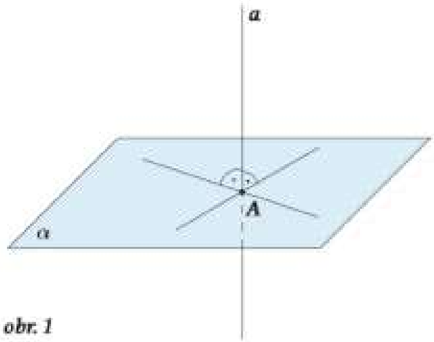
Tvrzení, že přímka a rovina jsou k sobě kolmé (navzájem kolmé), znamená, že přímka je kolmá k rovině (je kolmicí) a také naopak, že rovina je kolmá k přímce. Je-li přímka a kolmá k rovině α, píšeme $a \perp \alpha$ nebo $\alpha \perp a$. Průsečík kolmice s rovinou se nazývá **pata kolmice**. *Úsečka* je kolmá k rovině, je-li k rovině kolmá přímka, na které úsečka leží.

Metrické vlastnosti

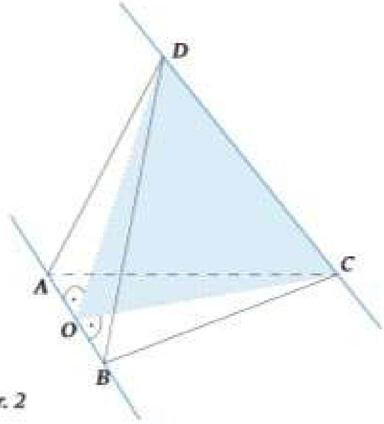
Pokud chceme dokázat, že přímka není kolmá na rovinu, stačí v rovině najít jednu přímku, k níž daná přímka není kolmá. Chceme-li ověřit, zda přímka je kolmá k rovině, používáme **kritérium kolmosti přímky a roviny**:

zapamatujeme si

Přímka a rovina jsou k sobě kolmé, jestliže je přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny *(obr. 1)*.



obr. 1



obr. 2

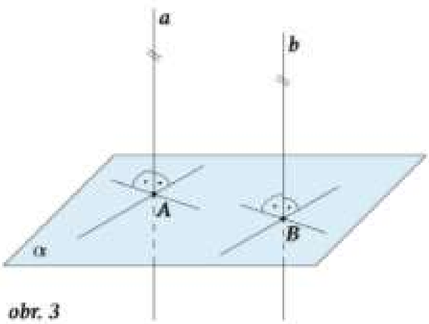
Z definice kolmosti přímky a roviny vyplývá důležitá věta, kterou využíváme při důkazu kolmosti dvou mimoběžných přímek:

Jestliže přímka leží v rovině kolmé k jiné přímce, jsou tyto přímky navzájem kolmé.

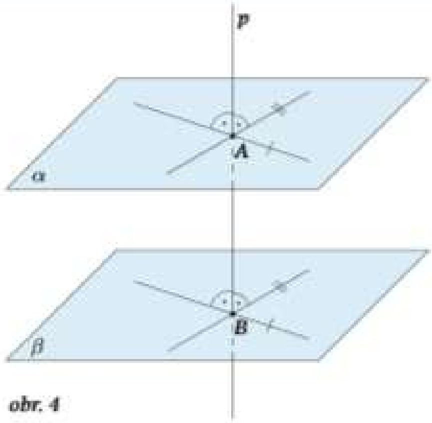
Pomocí této věty se můžeme například přesvědčit, že přímky obsahující protější hrany pravidelného čtyřstěnu jsou navzájem kolmé. V pravidelném čtyřstěnu *ABCD* jsou to přímky *AB* a *CD*, *BC* a *AD* a také *AC* a *BD* *(obr. 2)*.
Přímka *AB* je kolmá k rovině *CDO*, kde bod *O* je středem hrany *AB*, neboť je kolmá k přímkám *CO* a *DO* (úsečka *CO* je výškou v trojúhelníku *ABC* a úsečka *DO* výškou v trojúhelníku *ABD*). Je proto kolmá ke všem přímkám roviny *CDO*, a tedy i k přímce *CD*. Podobně bychom postupovali v případě dalších dvojic.

Pro kolmost přímek a rovin platí celá řada užitečných vět:

- Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou kolmici.
- Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou kolmou rovinu.
- Všechny přímky kolmé k téže rovině jsou navzájem rovnoběžné *(obr. 3)*.
- Všechny roviny kolmé k téže přímce jsou navzájem rovnoběžné *(obr. 4)*.



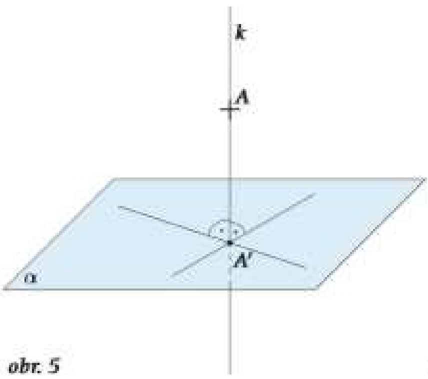
obr. 3



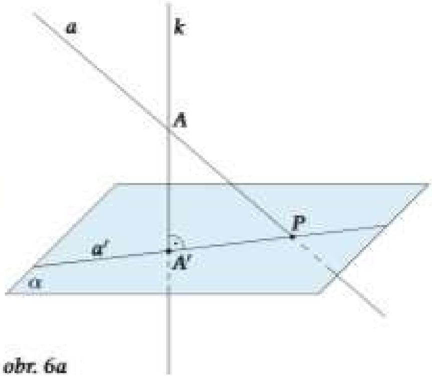
obr. 4

Metrické vlastnosti

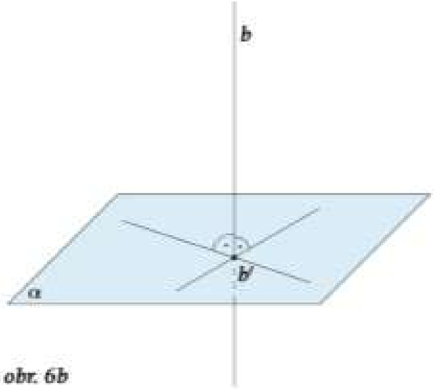
Pomocí přímky kolmé k rovině sestrojíme **pravoúhlý průmět bodu** do roviny. Je-li α libovolná rovina a A libovolný bod ($A \notin \alpha$), je pravoúhlý průmět bodu A do roviny α pata A' kolmice k vedené bodem A k rovině α *(obr. 5)*. **Pravoúhlý průmět útvaru** do roviny je množina pravoúhlých průmětů všech jeho bodů. Pravoúhlým průmětem přímky a do roviny α, která k ní není kolmá, je přímka a' *(obr. 6a)*, pravoúhlým průmětem přímky b do roviny α k ní kolmé, je bod b' *(obr. 6b)*.



obr. 5



obr. 6a



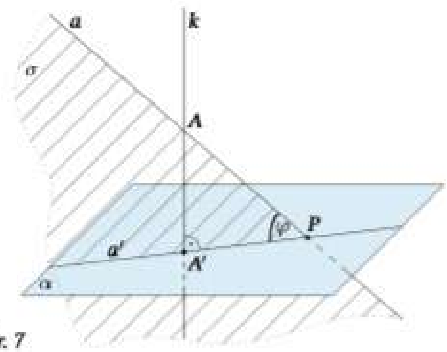
obr. 6b

Odchylka přímky a roviny

Odchylku přímky a roviny definujeme pomocí odchylky dvou přímek.

zapamatujeme si

- Odchylka přímky a roviny, která k ní není kolmá, je odchylka přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny *(obr. 7)*.
- Odchylka přímky a roviny, k níže je kolmá, je $90° \left(\frac{\pi}{2}\right)$.



obr. 7

Je-li φ odchylka přímky a a roviny α, píšeme $\varphi = |\sphericalangle a\alpha|$; přitom $\varphi \in \langle 0°; 90° \rangle$, resp. $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Odchylka $\varphi = 0°$, resp. $\varphi = 0$ (rad) je v případě, kdy je přímka rovnoběžná s rovinou.

Věty, které můžeme využít při určování odchylky přímky a roviny:

- Dvě přímky navzájem rovnoběžné mají od dané roviny stejnou odchylku; symbolicky $a \parallel b \Rightarrow |\sphericalangle a\alpha| = |\sphericalangle b\alpha|$.
- Přímka má od dvou daných rovin, které jsou navzájem rovnoběžné, stejnou odchylku; symbolicky $\alpha \parallel \beta \Rightarrow |\sphericalangle a\alpha| = |\sphericalangle a\beta|$.
- Dvě navzájem rovnoběžné přímky a dvě navzájem rovnoběžné roviny mají stejné odchylky; symbolicky $a \parallel b \wedge \alpha \parallel \beta \Rightarrow |\sphericalangle a\alpha| = |\sphericalangle a\beta| = |\sphericalangle b\alpha| = |\sphericalangle b\beta|$.

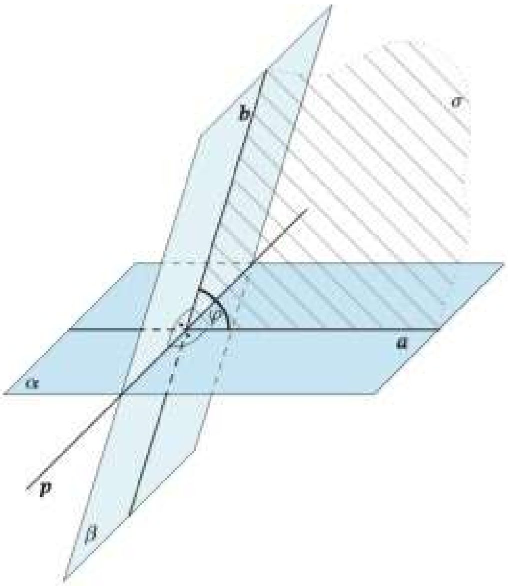
Metrické vlastnosti

Odchylka dvou rovin

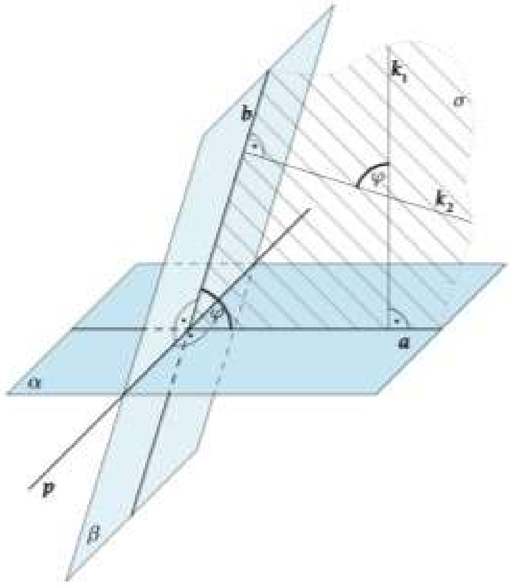
Odchylku dvou rovin definujeme pomocí odchylky dvou přímek.

zapamatujeme si

Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s libovolnou rovinou, která je k oběma rovinám kolmá *(obr. 8)*.



obr. 8



obr. 9

Je-li φ odchylka rovin α a β, píšeme $\varphi = |\sphericalangle \alpha\beta|$; přitom $\varphi \in \langle 0°; 90° \rangle$, resp. $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Odchylka $\varphi = 0°$, resp. $\varphi = 0$ (rad) je v případě, kdy jsou roviny navzájem rovnoběžné.

Jiný způsob určení odchylky, užívaný zejména v analytické geometrii, využívá přímek k rovinám kolmých:

Odchylka dvou rovin je odchylka dvou přímek, z nichž jedna je kolmá k jedné rovině a druhá je kolmá k druhé rovině *(obr. 9)*.

Kolmost dvou rovin

zapamatujeme si

Roviny jsou k sobě kolmé, právě když je jejich odchylka 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Jsou-li roviny α a β k sobě kolmé, píšeme $\alpha \perp \beta$, příp. $\beta \perp \alpha$. Chceme-li ověřit, zda jsou roviny k sobě kolmé, používáme **kritérium kolmosti dvou rovin**:

zapamatujeme si

Dvě roviny jsou k sobě kolmé, jestliže jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.