Soustava souřadnic v rovině

Víš, že...

- pro označení polohy figurky na šachovnici nebo kamene v deskové hře GO se používá soustava souřadnic neboli kartézský systém souřadnic?
- název kartézský systém souřadnic je odvozen od francouzského filozofa Reného Descarta (1596–1650)?
- výrok „Myslím, tedy jsem", latinsky *Cogito ergo sum*, pochází od Reného Descarta?
- vzdálenost bodů v rovině můžeme nejen změřit, ale i vypočítat pomocí souřadnic?

Naučíš se...

- přiřadit bodu v rovině jeho kartézské souřadnice.
- určit polohu bodu pomocí jeho souřadnic.
- určovat vzdálenost bodů výpočtem v souřadnicích.

Soustava souřadnic v rovině

Pojem souřadnic v rovině je velmi prostý a běžně se s ním setkáváme. Nevěříte? Začněme několika příklady.

Kůň na f3! Ano, šachisté popisují své tahy právě pomocí souřadnic cílového pole.

Mnohem starší je hra GO. Zde se kameny pokládají na průsečíky přímek, které na hrací desce tvoří čtvercovou síť. Chybí tu očíslování přímek, ale je jasné, že bychom mohli umístění kamene popsat třeba takto: pátá přímka zprava a šestá přímka shora. V moderní počítačové verzi této hry již najdeme označení písmeny a čísly podobně jako v šachu.

English Terms

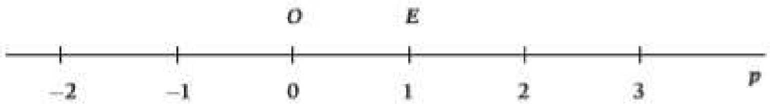
- cartesian coordinate | kartézská souřadnice
- axis | osa
- quadrant | kvadrant
- coordinates of point | souřadnice bodu
- number axis | číselná osa
- perpendicular line | kolmice
- coordinate system | soustava souřadnic
- line segment | úsečka
- segment *AB* | úsečka *AB*
- midpoint of line segment | střed úsečky
- midpoint of segment *AB* | střed úsečky *AB*
- lenght of line segment | délka úsečky
- distance of points | vzdálenost bodů

Že jsou oba příklady velmi staré? Tak pojďme do kina nebo divadla, kde jsou sedadla pěkně jedno za druhým jako na fotografii. Na lístku si přečtete: řada 3, sedadlo 5. To jsou přece také souřadnice.
Máte ve škole automat na občerstvení? Co musíte zadat, abyste dostali oblíbenou sušenku? Například 3A, tedy opět souřadnice.

Nyní se na pojem souřadnic podívejme trochu víc matematicky a začněme na přímce. Máme-li přímku p a vybereme na ní bod O, dostaneme dvě opačné polopřímky. Bodu O říkáme **počátek**. Když pak vybereme ještě jeden bod E (různý od O), říkáme, že polopřímka obsahující bod E je kladná a ta k ní opačná je záporná.
Bodu O přiřadíme číslo 0 a bodu E číslo 1. Velikost úsečky OE je velikost jednotky měření, tj. $|OE| = 1$. Bodu A na přímce p přiřadíme souřadnici a, tj. velikost úsečky OA vzhledem k jednotce měření, a opatříme ji znaménkem:

- $a = |OA|$, pokud A leží na kladné polopřímce
- $a = -|OA|$, pokud A leží na záporné polopřímce

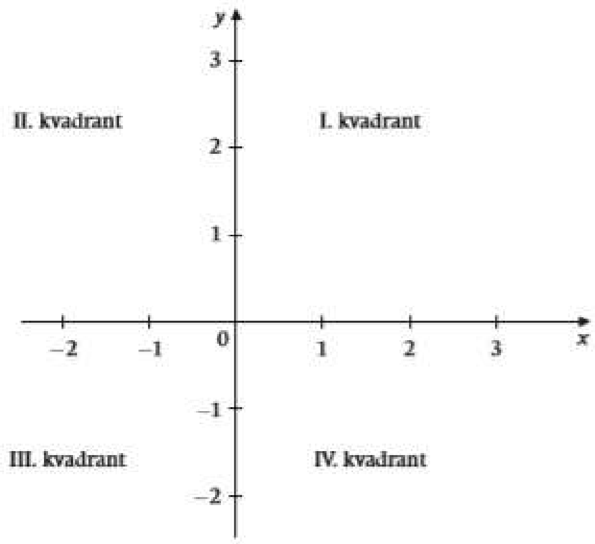
Takové přímce říkáme **číselná osa**.



Číselná osa

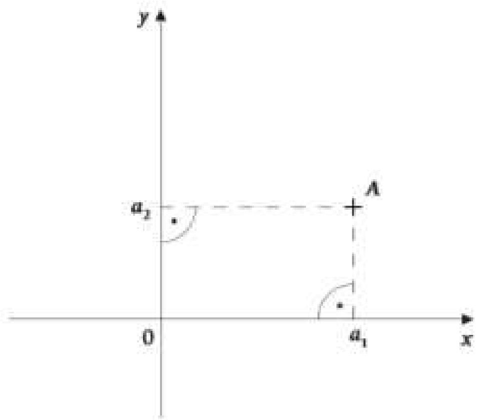
Soustava souřadnic v rovině

V rovině zvolíme dvě na sebe kolmé číselné osy se společným počátkem O a se stejnými jednotkami měření. Budeme jim říkat osa x a osa y a hovořit o **kartézské soustavě souřadnic** Oxy v rovině. Názvy os píšeme vždy ke kladným polopřímkám. Souřadnicové osy rozdělí rovinu na čtyři části, kterým říkáme kvadranty a číslujeme je tak jako na obrázku.



Kvadranty

Každému bodu A v rovině s kartézskou soustavou souřadnic Oxy přiřadíme souřadnice takto: Bodem A vedeme kolmici k osám x a y. Průsečík s osou x má na této ose souřadnici a_1, průsečík s osou y má na této ose souřadnici a_2. Řekneme, že souřadnice bodu A v rovině jsou uspořádané dvojice $[a_1, a_2]$, píšeme $A = [a_1, a_2]$. Někdy používáme také značení $A = [x_A, y_A]$.
Známe-li naopak souřadnice bodu A a chceme ho zakreslit v kartézské soustavě souřadnic Oxy, naneseme na osu x souřadnici a_1, na osu y souřadnici a_2. Kolmice vedené těmito body k osám se protnou v bodě A.



Souřadnice bodu A v kartézské soustavě souřadnic Oxy

souvislosti

Název „kartézská" soustava souřadnic je odvozen od jména významného francouzského filozofa, matematika a fyzika **Reného Descarta** (latinsky *Renatus Cartesius*), (31. 3. 1596 – 11. 2. 1650). Ve spisu *Geometrie*, který byl součástí rozsáhlého filozofického spisu *Rozprava o metodě* z roku 1637, použil R. Descartes metodu souřadnic pro studium geometrických útvarů v rovině. Je proto považován za jednoho ze zakladatelů analytické geometrie.

René Descartes

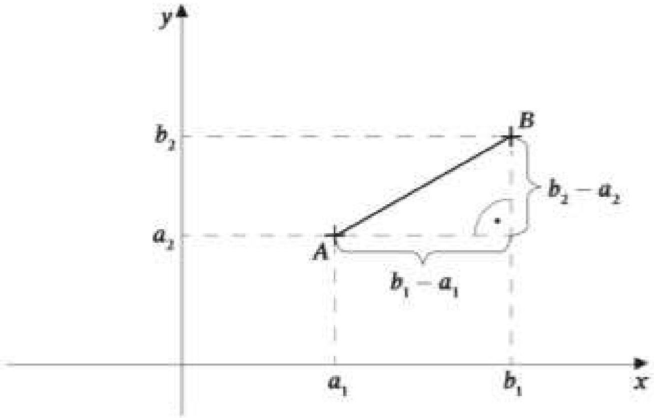
Soustava souřadnic v rovině

Vzdálenost dvou bodů (délka úsečky)

Pojem úsečka znáte z planimetrie. Víte také, jak délku úsečky měříme. Jak ale délku úsečky vypočítáme? Také bychom se mohli ptát: Jaká je vzdálenost koncových bodů úsečky?

Podíváte-li se dobře na obrázek a vzpomenete si na Pythagorovu větu, je vidět, jak vypočítáme délku úsečky AB:

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$



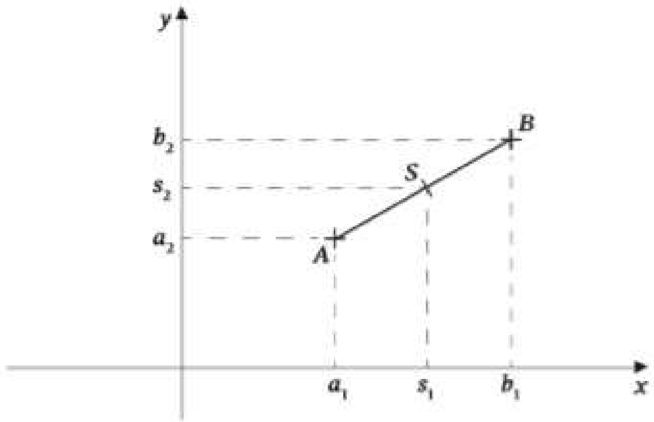
Pozor! Možná jste si všimli, že v obrázku je $b_1 - a_1$, ale ve vzorečku $a_1 - b_1$. Je to chyba? Není, čísla $a_1 - b_1$ a $b_1 - a_1$ jsou opačná a jejich druhé mocniny se rovnají.

zapamatujeme si

Máme-li dva body $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, pak jejich vzdálenost, tj. délku úsečky AB, označujeme $|AB|$ a vypočítáme ji pomocí vzorce $|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$.

Střed úsečky

Každá úsečka má svůj střed. Souřadnice středu s_1 je stejně daleko od a_1 jako od b_1, vypočítáme ji tedy jako aritmetický průměr. Podobně pro souřadnici s_2.



zapamatujeme si

Pro souřadnice středu $S = [s_1, s_2]$ úsečky AB, $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, platí: $s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, $s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

Soustava souřadnic v rovině

Příklad 1

Na číselné ose vyznačte čísla: $\frac{6}{5}, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}$ a $\frac{5}{3}$.

postup

Zadaná čísla si pomocí kalkulačky převedeme na desetinná čísla s vhodným počtem desetinných míst.
Než budeme čísla vyznačovat na číselné ose, musíme zjistit, čemu odpovídá jeden dílek na číselné ose.

řešení

1. krok

$\frac{6}{5} = 1,2; \sqrt{2} \doteq 1,41; \frac{3}{2} = 1,5; \sqrt{3} \doteq 1,73; \frac{5}{3} \doteq 1,67$

2. krok

Jeden dílek na číselné ose odpovídá délce 0,2.

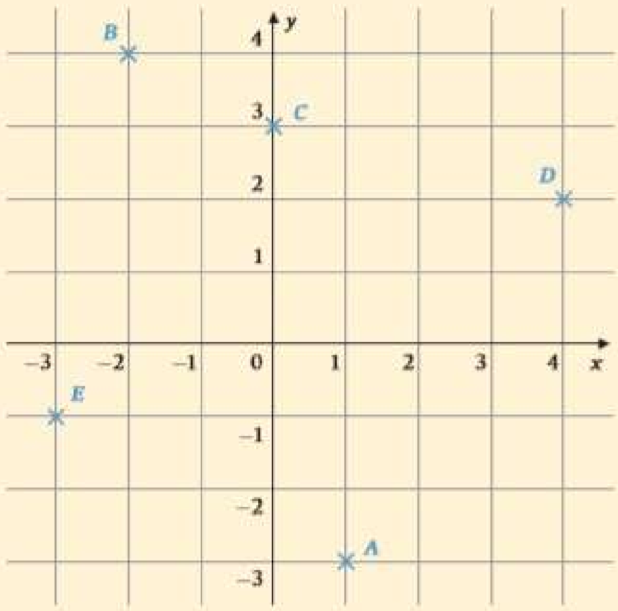
3. krok

Příklad 2

Do kartézské soustavy souřadnic zakreslete následující body: $A = [1, -3]$, $B = [-2, 4]$, $C = [0, 3]$, $D = [4, 2]$ a $E = [-3, -1]$.
Určete, ve kterém kvadrantu body leží.

řešení

1. krok



2. krok

$A \in$ IV. kvadrant
$B \in$ II. kvadrant
$C \in$ osa y
$D \in$ I. kvadrant
$E \in$ III. kvadrant