Základní kombinatorická pravidla

Víš, že…

DNA – deoxyribonukleová kyselina je tvořena řetězcem nukleotidů a je nositelkou genetické informace všech organismů? Lidský genom je složen z několika miliard nukleotidů, přičemž pro DNA dlouhou pouhých 10 nukleotidů existuje teoreticky $4^{10} = 1\,048\,576$ různých kombinací.

barevný **RGB** model je způsob míchání barev používaný v monitorech a televizorech? Kombinováním intenzit červené, zelené a modré barvy (každá barva má 256 možností) lze získat $256^3 = 16\,777\,216$ různých barev.

Naučíš se…

- určovat počty možných variant (způsobů).
- řešit jednoduché kombinatorické úlohy.
- používat kombinatorická pravidla součtu a součinu.

Základní kombinatorická pravidla

Kombinatorika je část matematiky, která zkoumá některé vlastnosti **konečných množin**.
Mimo jiné se zabývá vytvářením skupin z daných prvků, určováním počtu těchto skupin, popisem způsobu (systému), jak najít všechny skupiny, atd. Hledaný počet skupin závisí na mnoha faktorech – na tom, zda se prvky v jednotlivých skupinách mohou či nemohou opakovat, zda vybrané skupiny jsou uspořádané či nikoli atd.

K úspěšnému vyřešení většiny kombinatorických úloh nám stačí využít **kombinatorická pravidla součtu a součinu**, která jste v minulosti již mnohokráte použili, aniž jste věděli, že jde o nějaká kombinatorická pravidla.

English Terms

combinatorics kombinatorika
combinatorial principle kombinatorické principy
rule of sum or addition principle pravidlo součtu
rule of product or multiplication principle pravidlo součinu
disjoint sets disjunktní množiny

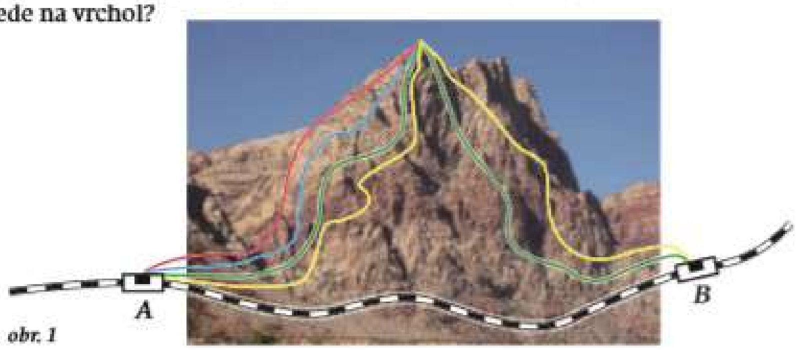
zapamatujeme si

Kombinatorické pravidlo součtu
Pokud množina A_1 má n_1 prvků, množina A_2 má n_2 prvků atd. až množina A_k má n_k prvků a každé dvě z těchto množin jsou disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ je roven $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Ukážeme si užití tohoto pravidla v následujících dvou situacích:

- **Situace 1**

Turista plánuje výstup na Babí horu *(obr. 1)*. Pojede vlakem a může vystoupit ve stanici A nebo ve stanici B. Kolik různých cest vede na vrchol?

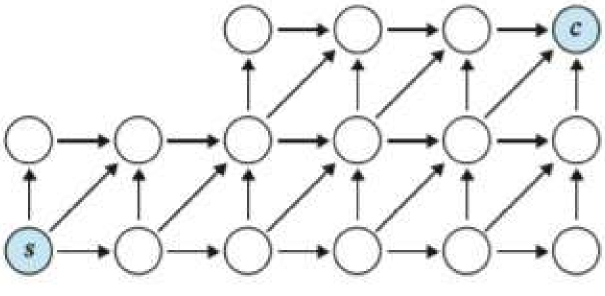


obr. 1

Vystoupí-li turista ve stanici A, nemůže současně vystoupit ve stanici B a naopak (tj. množiny cest ze stanic A a B jsou disjunktní). Ze stanice A vedou na vrchol čtyři trasy, ze stanice B vedou k vrcholu dvě trasy. Celkem má tedy turista $4 + 2 = 6$ možných cest na vrchol.

- **Situace 2**

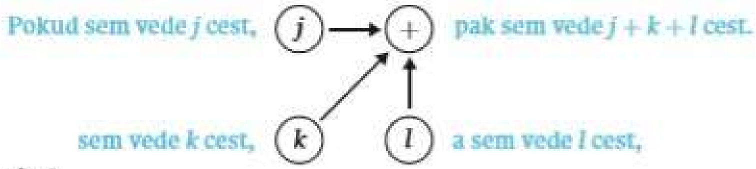
Na *obr. 2* stojí figurka ve vrcholu s. Pohybem ve směru šipek se má figurka přesunout do vrcholu c. Kolika různými způsoby to lze udělat?



obr. 2

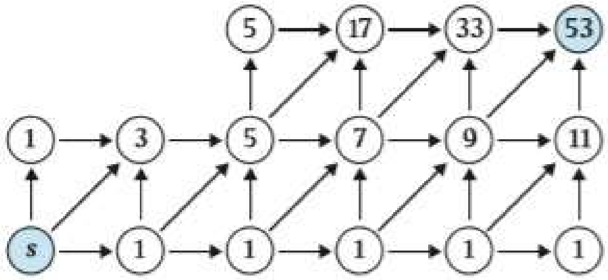
Základní kombinatorická pravidla

Z pravidel pro pohyb figurky plyne následující vztah *(viz obr. 3)*, **který je příkladem kombinatorického pravidla součtu.**



obr. 3

S využitím kombinatorického pravidla součtu určujeme postupně počty cest vedoucích do jednotlivých vrcholů a dostaneme *(obr. 4)*:



obr. 4

Vidíme tedy, že do vrcholu *c* se lze dostat celkem 53 různými cestami.

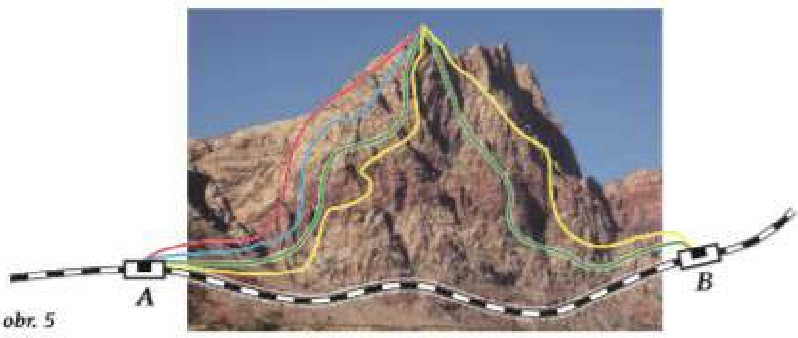
zapamatujeme si

Kombinatorické pravidlo součinu
Pokud objekt A_1 můžeme vybrat n_1 způsoby, objekt A_2 můžeme vybrat n_2 způsoby atd. až objekt A_k můžeme vybrat n_k způsoby, pak počet způsobů, jak lze vytvořit uspořádanou k-tici objektů $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Ukážeme si užití tohoto pravidla v následujících dvou situacích:

- **Situace 1**

Turista plánuje přechod přes Babí horu *(obr. 5)*. Vystoupí ve stanici *A*, vracet se bude do stanice *B*. Kolik různých cest může turista zvolit?



obr. 5

Ze stanice *A* vedou na vrchol čtyři trasy a z vrcholu vedou do stanice *B* dvě trasy. Celkem má tedy turista $4 \cdot 2 = 8$ možných cest.

Problém můžeme řešit i systematickým vypsáním všech možností, což lze znázornit takto:

Je tedy zřejmé, že turista má skutečně 8 možných cest.

Základní kombinatorická pravidla

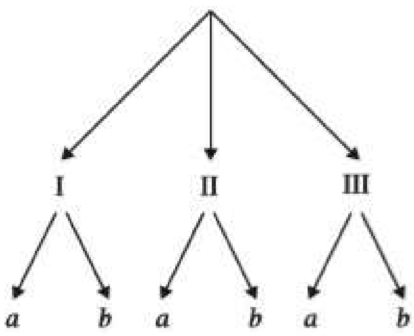
- **Situace 2**

V závodní jídelně vaří tři druhy polévek a dvě hlavní jídla. Kolik různých menu (polévka + hlavní jídlo) si může strávník zvolit?

Strávník si může vybrat jednu ze tří polévek – má tedy 3 možnosti. Následně si vybírá jedno ze dvou hlavních jídel. Celkem má tedy $3 \cdot 2 = 6$ možností.

Všechna možná menu můžeme také vypsat. Polévky označíme I, II, III a hlavní jídla *a*, *b*. Pak všechna možná menu jsou: I-*a*, I-*b*, II-*a*, II-*b*, III-*a*, III-*b*, je jich tedy skutečně 6.

Výpočet lze znázornit i následujícím grafem:



obr. 6

souvislosti

Graf na obr. 6 se v matematice nazývá **strom** a připomíná pyramidu. Přidáváním dalších úrovní do pyramidy počet možností velmi rychle roste. S tímto modelem se v praxi lze občas setkat v tzv. **pyramidových hrách** (označovaných také jako **letadlo**). Pyramidová hra je dlouhodobě neudržitelný podvodný model, který slibuje výdělek za získávání dalších účastníků takového schématu. V praxi takový model ale nefunguje, neboť počet účastníků velmi rychle narůstá (podle kombinatorického pravidla součinu).

Po roce 1989 se ve východní Evropě podařilo iniciovat několik „velmi úspěšných" pyramidových her. Lidé neměli žádné zkušenosti s kapitálovým trhem a uvěřili, že je možné získat výdělky v řádu tisíců procent. Metody podvodníků se mohou lišit, ale princip je stejný.

Například už vám jistě někdy došel dopis od některého z vašich známých zhruba v tomto znění:
„Pošli 10 Kč na první adresu z uvedených 5 adres. V seznamu adres pak vynech prvního adresáta a sebe napiš na 5. místo. Takto upravený dopis pošli 10 známým. Po čase ti přijde 1 000 000 Kč."

Toto je sice krásná myšlenka, ale bohužel reálně tento model nefunguje a velice rychle se rozpadá kvůli nedostatku dalších adresátů. Jediná skupina, která na tom opravdu vydělá, je úzký okruh zakladatelů pyramidy.

Základní kombinatorická pravidla

Příklad 1

Ve třídě je 15 děvčat a 14 kluků. Kolika způsoby může třída zvolit svého zástupce do školní samosprávy?

řešení

Jednoho kandidáta vybíráme z celkového počtu žáků, tzn. $15 + 14 = 29$ způsobů.

Příklad 2

Kolika způsoby lze vybrat jednu samohlásku a jednu souhlásku ze slova „kniha"?

řešení 1

1. krok
Samohlásky ve slově „kniha" jsou **i, a**, souhlásky jsou **k, n, h**.

2. krok
Nejprve vybereme samohlásku (2 možnosti) a k ní vybíráme souhlásku (3 možnosti).

3. krok
Celkem tedy máme $2 \cdot 3 = 6$ různých možností.

řešení 2

1. krok
Vzhledem k malému počtu možností lze úlohu řešit i systematickým vypsáním všech možností:

2. krok
i-k i-n i-h a-k a-n a-h

3. krok
Celkem je tedy 6 různých možností.

Příklad 3

Ve třídě je 15 děvčat a 14 kluků. Kolika způsoby může třída vybrat taneční pár do školní taneční soutěže?

řešení

1. krok
Nejprve vybereme chlapce (15 možností).

2. krok
K němu vybíráme dívku (14 možností).

3. krok
Celkem tedy máme $15 \cdot 14 = 210$ různých tanečních párů.