Posloupnosti – základní pojmy

Víš, že…

- s posloupnostmi se pravidelně setkáváme v každodenním životě?
- meteorologické stanice hlásí každou hodinu teplotu vzduchu?
- pražská burza zveřejňuje na konci každého dne hodnotu burzovního indexu PX?
- Český statistický úřad každý měsíc informuje o hodnotě exportu z ČR?
- manažera supermarketu zajímají například velikosti denních a měsíčních tržeb?
- sledujeme-li předchozí údaje za několik období, dostáváme z hlediska matematiky posloupnosti čísel?

Naučíš se…

- zadávat posloupnosti.
- graficky je znázornit.
- poznávat vlastnosti posloupností.
- využít posloupností při řešení příkladů z praxe.

Posloupnosti – základní pojmy

zapamatujeme si

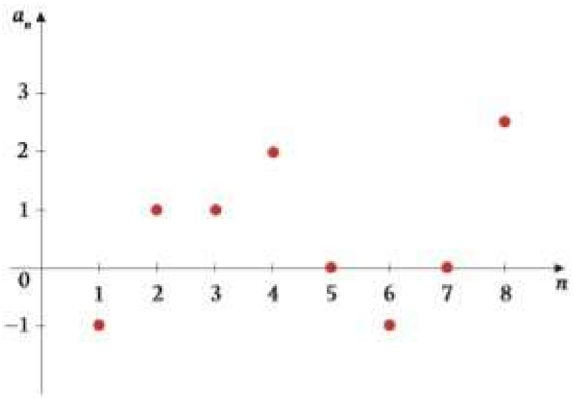
Funkce z množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ se nazývá **posloupnost**.
Je-li definiční obor posloupnosti konečná množina, nazývá se posloupnost **konečná**. V opačném případě, tj. pokud je definiční obor posloupnosti nekonečná množina, se posloupnost nazývá **nekonečná**.
Zápis: Nekonečnou posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ zapisujeme symbolicky $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$. Konečnou posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k$ zapíšeme $\left(a_n\right)_{n=1}^{k}$. Nehrozí-li nedorozumění, používáme zkrácený zápis (a_n).
Jednotlivé prvky posloupnosti (a_n) nazýváme **členy posloupnosti**.

Příklady posloupností

1. Čísla 5, 10, 15, 20, 25, 30, … jsou počátečními členy posloupnosti přirozených násobků 5.
   n-tý člen této posloupnosti je tvaru $a_n = 5n$. Posloupnost zapíšeme: $\left(5n\right)_{n=1}^{\infty}$
2. Čísla $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$ jsou počátečními členy posloupnosti, jejíž n-tý člen je tvaru $a_n = \frac{1}{2n}$.
   Posloupnost zapíšeme: $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$
3. Čísla 8, 11, 14, 17, 20, … jsou počátečními členy posloupnosti, ve které je každému přirozenému číslu n přiřazeno číslo $3n + 5$. Takovou posloupnost zapíšeme: $\left(3n+5\right)_{n=1}^{\infty}$

Grafické znázornění posloupnosti

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů $\{[n, a_n] \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}\}$.
Na následujícím obrázku je znázorněna konečná posloupnost $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 0$, $a_6 = -1$, $a_7 = 0$, $a_8 = 2{,}5$.



Grafické znázornění konečné posloupnosti

English Terms

sequence posloupnost
finite konečná
infinite nekonečná
members (elements or terms) členy
increasing sequence rostoucí posloupnost
decreasing sequence klesající posloupnost
recurrent sequence rekurentní posloupnost

zapamatujeme si

Posloupnost lze zadat několika způsoby:
1. **vypsáním všech jejích členů** – lze jen v případě konečných posloupností
2. **grafem** (viz obrázek) – opět jen v případě konečných posloupností
3. **vzorcem pro n-tý člen** – to už umíme (viz výše – příklady posloupností)
4. **rekurentně** – u tohoto způsobu zadání posloupnosti se zastavíme

Posloupnosti – základní pojmy

Rekurentní zadání posloupnosti

Toto zadání posloupnosti znamená uvedení několika jejích členů a vyjádření n-tého členu pomocí vzorce, v němž vystupují členy předcházející.

Příklady rekurentního zadání posloupnosti a výpočet jejích členů:

1. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -a_n + 5$

   To znamená, že člen a_2 určíme takto: $a_2 = a_{1+1} = -a_1 + 5 = -2 + 5 = 3$
   Pro další členy platí:
   $a_3 = a_{2+1} = -a_2 + 5 = -3 + 5 = 2$
   $a_4 = a_{3+1} = -a_3 + 5 = -2 + 5 = 3$
   atd.

2. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacciho posloupnost)

   Člen a_3 určíme takto: $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
   Pro další členy platí:
   $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$
   $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$
   atd.

Nevýhodou rekurentního zadání posloupnosti je, že pokud chceme například znát dvacátý člen posloupnosti, musíme znát všech 19 předcházejících členů. V některých případech lze z rekurentního vyjádření posloupnosti najít vzorec pro n-tý člen (ukážeme si na příkladech).

Vlastnosti posloupností

Posloupnost je zvláštním případem reálné funkce, a proto můžeme také u ní zkoumat obdobné vlastnosti jako u funkcí, např. omezenost a monotónnost.

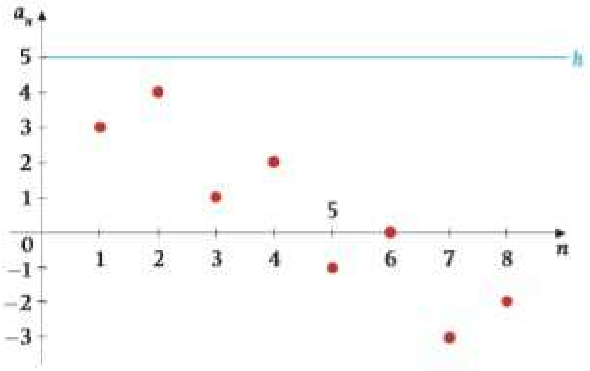
Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

- **shora omezená**, existuje-li reálné číslo h takové, že $a_n \le h$, pro každé $n \in \mathbb{N}$
- **zdola omezená**, existuje-li reálné číslo d takové, že $a_n \ge d$, pro každé $n \in \mathbb{N}$
- **omezená**, je-li omezená shora i zdola

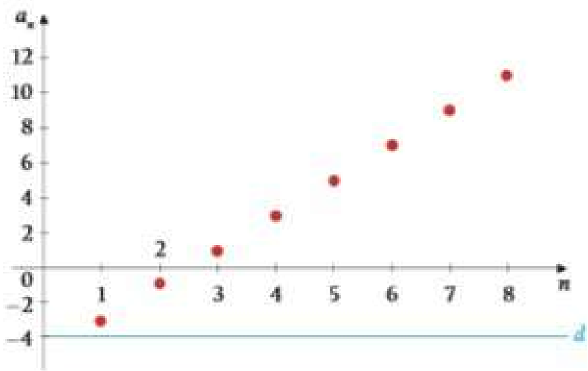
Příklady

Na obr. 1 je několik prvních členů posloupnosti $\left(5 + (-1)^n - n\right)_{n=1}^{\infty}$, která je shora omezená.
Na obr. 2 je několik prvních členů posloupnosti $\left(2n - 5\right)_{n=1}^{\infty}$, která je zdola omezená.

Pozor! Uvědomte si, že takových čísel h, resp. d, existuje nekonečně mnoho!



obr. 1 – shora omezená posloupnost

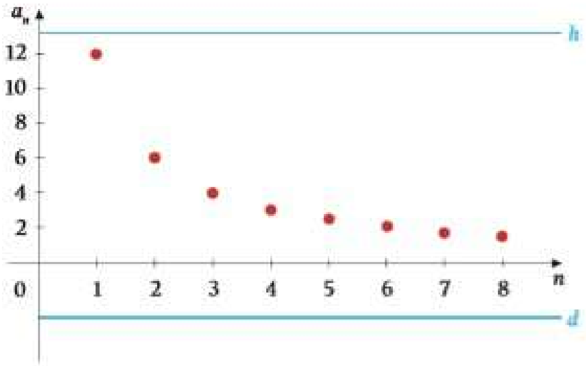


obr. 2 – zdola omezená posloupnost

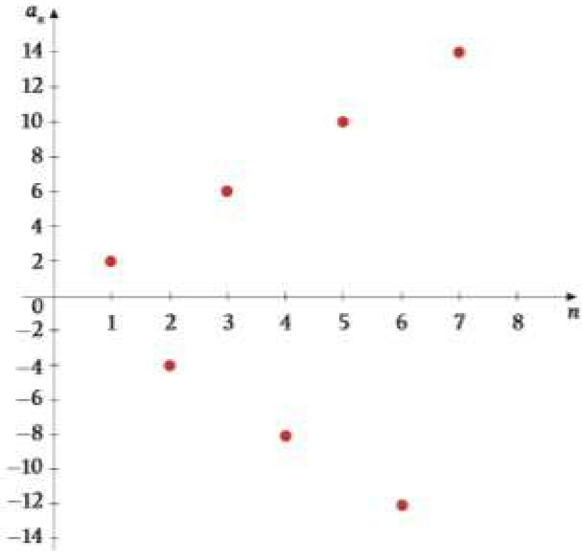
Posloupnosti – základní pojmy

Na *obr. 3* je několik prvních členů posloupnosti $\left(\frac{12}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, která je omezená.

Na *obr. 4* je několik prvních členů posloupnosti $\left((-1)^{n+1}2n\right)_{n=1}^{\infty}$, která je neomezená.



obr. 3 – omezená posloupnost



obr. 4 – neomezená posloupnost

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

- **konstantní,** jestliže $a_n = a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$
- **rostoucí,** jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$
- **klesající,** jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$
- **neklesající,** jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$
- **nerostoucí,** jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

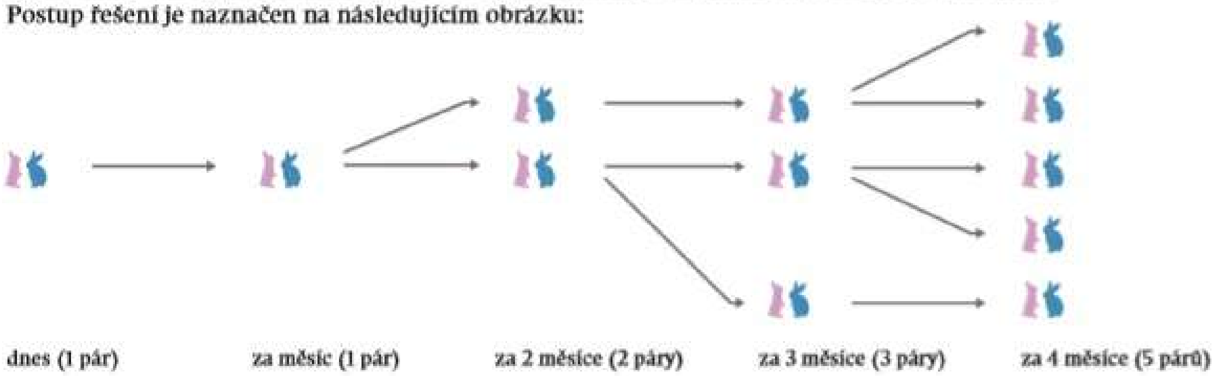
Posloupnost se nazývá **monotónní,** má-li některou z pěti výše uvedených vlastností. Posloupnosti rostoucí a klesající nazýváme **ryze monotónními**.

zajímavost

Historie posloupností je velmi stará. Základní poznatky byly objeveny už v Egyptě, Babylóně a Číně. Ve starověkém Řecku jim byla věnována pozornost hlavně v souvislosti s problémem nekonečna. Ve 13. století italský matematik Fibonacci vydal knihu Liber abacci, která obsahovala řadu praktických úloh, z nichž je nejznámější „úloha o králících", která vede k tzv. Fibonacciho posloupnosti.

Fibonacciho socha v italském městě Pisa

Fibonacciho úloha o králících: Kolik párů králíků můžeme získat z jednoho páru za rok, jestliže každý měsíc vyprodukuje každý pár jeden nový pár a nový pár začíná plodit mladé dva měsíce po narození?
Postup řešení je naznačen na následujícím obrázku:



Posloupnosti – základní pojmy

Příklad 1

Napište prvních pět členů posloupnosti, která je dána vzorcem pro n-tý člen: $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$.

řešení

1. krok

Do vzorce $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ dosadíme postupně za n čísla 1 až 5.

$n = 1$: $a_1 = \frac{(-1)^1}{1+2} = -\frac{1}{3}$

2. krok

$n = 2$: $a_2 = \frac{(-1)^2}{2+2} = \frac{1}{4}$

3. krok

$n = 3$: $a_3 = \frac{(-1)^3}{3+2} = -\frac{1}{5}$

$n = 4$: $a_4 = \frac{(-1)^4}{4+2} = \frac{1}{6}$

$n = 5$: $a_5 = \frac{(-1)^5}{5+2} = -\frac{1}{7}$

Příklad 2

Graficky znázorněte prvních pět členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = 2n^2 - 5$.

řešení

1. krok

Nejprve vypočítáme hodnoty prvních pěti členů této posloupnosti, dosazujeme za n do výše uvedeného vzorce: $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 5 = -3$.

2. krok

$a_2 = 2 \cdot 2^2 - 5 = 3$

3. krok

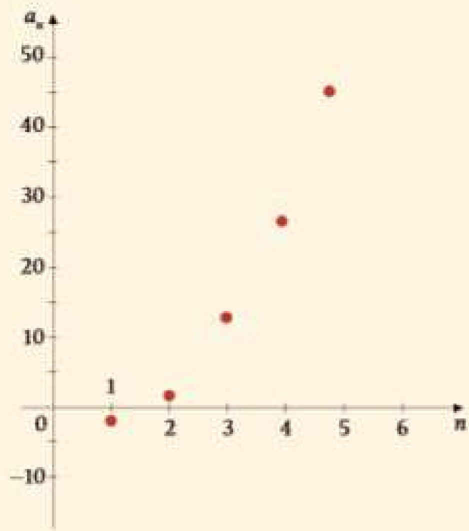
$a_3 = 2 \cdot 3^2 - 5 = 13$

$a_4 = 2 \cdot 4^2 - 5 = 27$

$a_5 = 2 \cdot 5^2 - 5 = 45$

4. krok

Nyní nakreslíme graf. Grafem je množina izolovaných bodů o souřadnicích $[1, -3], [2, 3], [3, 13], [4, 27], [5, 45]$.



Příklad 3

Napište prvních osm členů posloupnosti, která je dána rekurentně: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n$.

řešení

1. krok

$a_3 = a_2 - 2a_1 = 3 - 2 \cdot 2 = -1$

2. krok

$a_4 = a_3 - 2a_2 = -1 - 2 \cdot 3 = -7$

3. krok

$a_5 = a_4 - 2a_3 = -7 - 2 \cdot (-1) = -5$

$a_6 = a_5 - 2a_4 = -5 - 2 \cdot (-7) = 9$

$a_7 = a_6 - 2a_5 = 9 - 2 \cdot (-5) = 19$

$a_8 = a_7 - 2a_6 = 19 - 2 \cdot 9 = 1$